

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΥΡΙΔΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1



Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι, ίσως, η πιο σημαντική έννοια των Μαθηματικών.

Και αυτό γιατί μέσω αυτής δηλώνουμε τον τρόπο εξάρτησης ενός μεγέθους από κάποιο άλλο.

Έτσι, αν για παράδειγμα έχουμε δύο μεγέθη x , y τα οποία συνδέονται με τη σχέση $y = 3x$, λέμε ότι το y είναι συνάρτηση του x . Παραδείγματα σύνδεσης δύο μεγεθών έχουμε δει μέχρι τώρα πολλά όπως στην περίπτωση του εμβαδού E ενός τετραγώνου το οποίο είναι συνάρτηση της πλευράς του x αφού ισχύει $E = x^2$. Έτσι σε κάθε $x > 0$ που εκφράζει το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου αντιστοιχίζεται το μέγεθος E που εκφράζει το εμβαδό αυτού του τετραγώνου. Μάλιστα πολλές φορές, για να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι το E είναι συνάρτηση του x , αντί να γράφουμε απλά $E = x^2$ γράφουμε $E(x) = x^2$.

Με τον όρο συνάρτηση θα εννοούμε μια διαδικασία (κανόνα), με την οποία κάποιοι πραγματικοί αριθμοί x αντιστοιχίζονται σε κάποιους πραγματικούς αριθμούς y κάτω από κάποιες προϋποθέσεις.

Οπότε, η περιγραφή μιας συνάρτησης προϋποθέτει γνώση αυτής της διαδικασίας καθώς επίσης και του συνόλου A που περιέχει όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει το x .

Έχουμε λοιπόν τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός (συνάρτησης)

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε **ένα μόνο** πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Βασικές επισημάνσεις

- Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή γράφουμε
$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow f(x).$$
- Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

- Για να δηλώσουμε ότι μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A , γράφουμε $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Για παράδειγμα, αν για μια συνάρτηση f έχουμε $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ τότε το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A = (0,1)$.

- Το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .
- Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού τους είναι **διάστημα ή ένωση διαστημάτων**.
- Όταν θα λέμε ότι «**Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B** », θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Οπότε όταν λέμε ότι η f είναι ορισμένη στο B μπορεί το B να είναι το $\mathbb{R}$ ή το $(-\infty, 1]$ ή το $[2, 5)$ ή οποιοδήποτε άλλο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Συντομογραφία συνάρτησης

Για να οριστεί μία συνάρτηση f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της και
- η τιμή της, $f(x)$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Βασική επισήμανση

Όταν αναφερόμαστε σε μία συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο της, τότε θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x , για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα.

Για παράδειγμα, όταν δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$ χωρίς να αναφέρεται το πεδίο ορισμού της, τότε θεωρούμε ότι αυτό είναι το σύνολο $A = [2, +\infty)$, αφού το $f(x)$ έχει νόημα για εκείνα τα x , ώστε

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty).$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Κάθε παρονομαστής οφείλει να είναι διαφορετικός του μηδενός.
- Κάθε υπόρριξη ποσότητα οφείλει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.
- Κάθε λογαριθμητέα ποσότητα οφείλει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

Οπότε, αν $A(x)$ είναι αλγεβρική παράσταση που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ έχουμε:

Συνάρτηση	Εύρεση πεδίου ορισμού
$f(x) = \frac{1}{A(x)}$	$A(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
$f(x) = \ln A(x)$	$A(x) > 0$

Πεδίο ορισμού βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού
$f(x) = x^v, v \in \mathbb{N}^*$	$A = \mathbb{R}$
$f(x) = x^{-v}, v \in \mathbb{N}^*$	$A = \mathbb{R}^*$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Z}$	$A = [0, +\infty)$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_-^* - \mathbb{Z}$	$A = (0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt[v]{x}, v \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$A = [0, +\infty)$
$f(x) = \eta\mu x$	$A = \mathbb{R}$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$A = \mathbb{R}$
$f(x) = \varepsilon\varphi x$	$A = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \sigma\varphi x$	$A = \mathbb{R} - \{ \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \}$
$f(x) = e^x$	$A = \mathbb{R}$
$f(x) = \alpha^x, 0 < \alpha \neq 1$	$A = \mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$	$A = (0, +\infty)$

Βασική επισήμανση

Η περιγραφή μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει με έναν τύπο ο οποίος δεν είναι απαραίτητα ενιαίος αλλά πολλαπλός.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

περιγράφεται με έναν διπλό τύπο. Από τον τύπο της f προκύπτει ότι η f ορίζεται για $x < 0$ δηλαδή, στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και για $x > 1$ δηλαδή, στο διάστημα $(1, +\infty)$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Επίσης, ισχύει

$$f(x) = x^2, \text{ όταν } x < 0 \text{ και } f(x) = 2x, \text{ όταν } x > 1.$$

**Πρόταση μελέτης**

Όλες οι λυμένες ασκήσεις και από τις ασκήσεις για λύση οι:

1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 20, 24, 25, 26, 29, 31, 32, 34.

**Λυμένες ασκήσεις****■ Εύρεση πεδίου ορισμού**

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$

ii) $f(x) = \frac{1}{|x|-3}$

iii) $f(x) = \sqrt{4-x}$

iv) $f(x) = \frac{x}{2\eta\mu x - 3}$.

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$x^2 - 4x + 3 \neq 0.$$

Η εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Άρα,

$$D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\} = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty).$$

- ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $|x| - 3 \neq 0$. Όμως, $|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 3$.

Επομένως, $|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ και $x \neq 3$. Άρα, $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

- iii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Επομένως, $D_f = (-\infty, 4]$.

- iv) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $2\eta\mu x - 3 \neq 0$. Όμως, $2\eta\mu x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 3 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{3}{2}$, αδύνατη αφού $\eta\mu x \in [-1, 1]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\frac{3}{2} > 1$.

Επομένως $2\eta\mu x - 3 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $D_f = \mathbb{R}$.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{|x|-1}}$

ii) $f(x) = \ln(16 - x^2)$

iii) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

iv) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

Λύση

- i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $|x| - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

Επομένως, $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

- ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $16 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{16} \Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

Επομένως, $D_f = (-4, 4)$.

iii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Επομένως, $D_f = (0, +\infty)$.

iv) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq \ln e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq e \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq e$$

Επομένως, $D_f = (0, e]$.

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{\sqrt{8-x^3}}{x}$

ii) $f(x) = \frac{x \ln x}{1-x}$

iii) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$

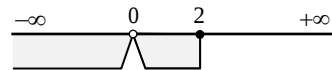
iv) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\begin{cases} 8 - x^3 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq 8 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq 2^3 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

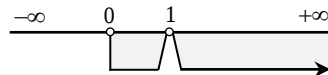
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2].$$



Επομένως, $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 2]$.

ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$



Επομένως, $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

iii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε:

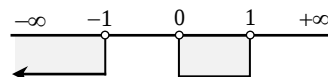
$$\frac{1}{x} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) > 0.$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παράστασης $x(1-x^2)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	0
$x(1-x^2)$	$+$	0	$-$	0	$-$

Οπότε, $x(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

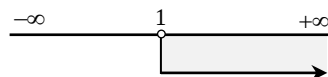
Επομένως, $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.



iv) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \ln x > \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Επομένως, $D_f = (1, +\infty)$.



4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & 1 < x \leq 4. \end{cases}$

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα x ώστε $x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0]$ καθώς επίσης και από όλα τα x ώστε $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$.

Δηλαδή,

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Σχόλιο

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου, προκύπτει από την ένωση των συνόλων ορισμού της με βάση τους περιορισμούς για το x σε κάθε κλάδο της.

- ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα x ώστε $x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ καθώς επίσης και από όλα τα x , ώστε

$$1 < x \leq 4 \Leftrightarrow x \in (1, 4].$$

Δηλαδή, $D_f = (-\infty, 0) \cup (1, 4]$.

▣ Τιμές συνάρτησης – Εύρεση παραμέτρων

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x - a}$ τέτοια, ώστε $f(1) = -3$.

Να βρείτε:

- i) την τιμή του a
 ii) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Λύση

- i) Έχουμε $f(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{1^2 + a \cdot 1}{1 - a} = -3 \Leftrightarrow 1 + a = -3(1 - a)$
 $\Leftrightarrow 1 + a = -3 + 3a \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$.

- ii) Για $a = 2$ έχουμε

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 2}.$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

Επομένως, $D_f = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax & , x \leq 0 \\ \ln x - ax & , x > 0 \end{cases}$ τέτοια, ώστε

$$f(-1) = f(1).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την τιμή του a .
 ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -x$.

Λύση

i) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \leq 0$ και για κάθε $x > 0$. Επομένως,

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Επίσης,

$$f(-1) = f(1) \Leftrightarrow (-1)^2 + 2\alpha(-1) = \ln 1 - \alpha \cdot 1 \Leftrightarrow 1 - 2\alpha = 0 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

ii) Αντικαθιστώντας στον τύπο της f την τιμή του α που βρήκαμε στο ερώτημα ii)

$$\text{προκύπτει } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \ln x - x, & x > 0 \end{cases}.$$

Οπότε:

- Αν $x \leq 0$, η εξίσωση $f(x) = -x$ ισοδύναμα γράφεται

$$x^2 + 2x = -x \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -3, \text{ δεκτές.}$$

- Αν $x > 0$, η εξίσωση $f(x) = -x$ ισοδύναμα γράφεται

$$\ln x - x = -x \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1, \text{ δεκτή.}$$

Επομένως, $f(x) = -x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -3 \text{ ή } x = 1.$

7. Να βρείτε τις τιμές του λ για τα οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + \lambda)$$

έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν ισχύει

$$x^2 + 2x + \lambda > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Η παράσταση $x^2 + 2x + \lambda$ είναι τριώνυμο 2^{ου} βαθμού με $a = 1 > 0$ και διακρίνουσα $\Delta = 4 - 4\lambda$. Οπότε, η σχέση (1) αληθεύει αν και μόνο αν $\Delta < 0$ δηλαδή,

$$4 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow -4\lambda < -4 \Leftrightarrow 4\lambda > 4 \Leftrightarrow \lambda > 1.$$

Σημείωση

Ένα τριώνυμο

$$ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0$$

για να παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα πρέπει $a > 0$ και $\Delta < 0$.

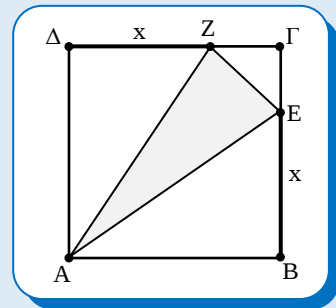
Γενικά ένα τριώνυμο

$$ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0$$

διατηρεί το πρόσημο του a για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν έχει διακρίνουσα $\Delta < 0$.

▣ Κατασκευή συνάρτησης σε πρόβλημα

8. Στο διπλανό σχήμα το ισοσκελές τρίγωνο AEZ , με $\text{AE} = \text{AZ}$, είναι εγγεγραμμένο σε τετράγωνο ABΓΔ με πλευρά $\text{AB} = 4$. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του $x \in (0, 4)$ την περίμετρο P του τριγώνου AEZ .



Λύση

Το AE είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ABE .

Οπότε, με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\text{AE}^2 = \text{AB}^2 + \text{BE}^2 = 4^2 + x^2 = 16 + x^2.$$

Επομένως,

$$\text{AE} = \sqrt{16 + x^2}.$$

Το EZ είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου EΓZ .

Οπότε, με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\text{EZ}^2 = \text{EΓ}^2 + \text{ΓZ}^2 = (4 - x)^2 + (4 - x)^2 = 2(4 - x)^2.$$

Επομένως,

$$\text{EZ} = \sqrt{2(4 - x)^2} = \sqrt{2} \cdot |4 - x| = \sqrt{2}(4 - x),$$

αφού $x < 4 \Leftrightarrow 4 - x > 0$.

Άρα, η περίμετρος του τριγώνου AEZ είναι

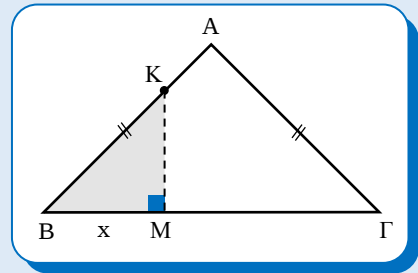
$$P(x) = \text{AE} + \text{AZ} + \text{EZ} = 2\text{AE} + \text{EZ},$$

αφού $\text{AZ} = \text{AE}$.

Δηλαδή,

$$P(x) = 2\sqrt{16 + x^2} + \sqrt{2}(4 - x), \quad x \in (0, 4).$$

9. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα $B\Gamma$ μήκους 4cm. Να εκφράσετε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x = BM$ όταν το M διαγράφει το εσωτερικό της $B\Gamma$ και $MK \perp B\Gamma$.



Λύση

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$. Οπότε, το ύψος του $A\Delta$ είναι και διάμεσος. Είναι φανερό, ότι όταν το M διαγράφει το $B\Delta$ το γραμμοσκιασμένο χωρίο είναι το ορθογώνιο τρίγωνο BMK (Σχήμα 1) ενώ όταν το M διαγράφει το $\Delta\Gamma$ το γραμμοσκιασμένο χωρίο είναι το τετράπλευρο $BMKA$ (Σχήμα 2).

Διακρίνουμε λοιπόν, δύο περιπτώσεις:

- Αν το M διαγράφει το $B\Delta$, τότε $0 < x \leq 2$ και το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned} E(x) &= (BMK) = \frac{1}{2}(BM)(MK) \\ &= \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}x^2, \end{aligned}$$

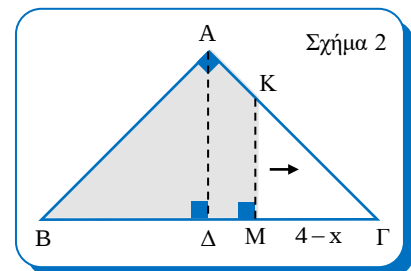
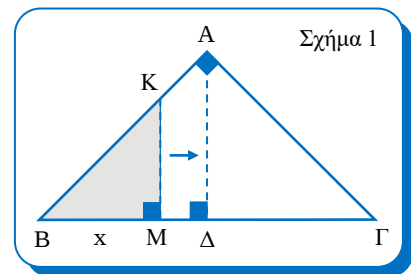
αφού το ορθογώνιο τρίγωνο BMK είναι ισοσκελές διότι $\hat{B} = 45^\circ$ και συνεπώς $\hat{K} = 45^\circ$.

- Αν το M διαγράφει το $\Delta\Gamma$, τότε $2 < x < 4$ και το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned} E(x) &= (BMKA) = (AB\Gamma) - (M\Gamma K) \\ &= \frac{1}{2}(AB)(A\Gamma) - \frac{1}{2}(M\Gamma)(MK) \\ &= \frac{1}{2}(AB)^2 - \frac{1}{2}(4-x)^2 \\ &= 4 - \frac{1}{2}(4-x)^2, \end{aligned}$$

αφού με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα, στο τρίγωνο $AB\Gamma$, προκύπτει ότι

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2 \Leftrightarrow 2(AB)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (AB)^2 = 8.$$



Τελικά,

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 < x \leq 2 \\ 4 - \frac{1}{2}(4-x)^2, & 2 < x < 4. \end{cases}$$

▣ Γενικές ασκήσεις

10. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$(f(x))^3 + 4f(x) = x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f .

Λύση

Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$f(x) \left[(f(x))^2 + 4 \right] = x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x-2}{(f(x))^2 + 4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

αφού

$$(f(x))^2 + 4 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε λοιπόν:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(f(x))^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(f(x))^2 + 4} < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(f(x))^2 + 4} > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$

Σχόλιο

Η δοθείσα σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$f(x) = \frac{x-2}{(f(x))^2 + 4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, για να βρούμε τις ρίζες και το πρόσημο της $f(x)$ αρκεί να βρούμε τις ρίζες και το πρόσημο της παράστασης

$$\frac{x-2}{(f(x))^2 + 4}.$$



Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα τουλάχιστον πραγματικό αριθμό y .
2. Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα μη κενό σύνολο B εννοούμε πάντα ότι το B είναι το πεδίο ορισμού της f .
3. Όταν για μια συνάρτηση f γράφουμε $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ δηλώνουμε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το A .
4. Για να ορίσουμε μια συνάρτηση f αρκεί να δώσουμε το πεδίο ορισμού της A και την τιμή της $f(x)$ για κάθε $x \in A$.
5. Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:
Αν $x_1 = x_2 \in A$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
6. Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
7. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.
8. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x_1) \neq f(x_2)$, τότε $x_1 \neq x_2$.
9. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$.



Ασκήσεις για λύση

■ Εύρεση πεδίου ορισμού

-  1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
1

i) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

ii) $f(x) = \frac{2x}{x-5}$

iii) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x}$

iv) $f(x) = \frac{x}{x^3-8}$

v) $f(x) = \frac{1}{x^3-4x}$

vi) $f(x) = \frac{x+3}{x^4-x}$

 **2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}$

ii) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 2}$

iii) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4x + 5}$

iv) $f(x) = \frac{3x}{4x^2 + 4x + 1}$.

 **3.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
1

i) $f(x) = |x| - 2$

ii) $f(x) = \frac{x}{|x| - 1}$

iii) $f(x) = \frac{3x - 2}{|x + 2| - |x|}$

iv) $f(x) = \frac{2x}{|x| + 1}$.

 **4.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
1

i) $f(x) = 2\sqrt{x} + x$

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

iii) $f(x) = \sqrt{x^3 - 8}$

iv) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

v) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

vi) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{5 - x}}$.

 **5.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
1

i) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

ii) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

iii) $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$

iv) $f(x) = \frac{x}{\sigma\upsilon\nu x - 2}$

v) $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$

vi) $f(x) = \sqrt{1 - \eta\mu x}$.

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

ii) $f(x) = \frac{x}{2^x - 8}$

iii) $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$

iv) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3^x - 9}}$.

 **7.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
2

i) $f(x) = x - \ln x$

ii) $f(x) = \ln(x - 2)$

iii) $f(x) = \ln(49 - x^2)$

iv) $f(x) = \ln(x^2 - 4x)$

v) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

vi) $f(x) = \ln|x|$.

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \ln(|x| - 1)$

ii) $f(x) = \ln(2 - \sqrt{x})$

iii) $f(x) = \ln(|x| - x)$

iv) $f(x) = \ln(|x| + x)$.

 **9.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}-2}$

ii) $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{3-x}+1}$

iii) $f(x) = \frac{4x}{e^x - 2}$

iv) $f(x) = \frac{x^2+1}{\ln x - 1}$.

 **10.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
3

i) $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

ii) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$

iii) $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$

iv) $f(x) = \ln(\ln x)$

v) $f(x) = \sqrt{-\ln x}$

vi) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

 **11.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
4

i) $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 1 \\ x^2 + 3x, & 1 < x < 4 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ e^x - 1, & x \geq 2 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$

iv) $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \leq 0 \\ x+1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$.

▣ Τιμές συνάρτησης – Εύρεση παραμέτρων

12. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{|x| - x}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii) Να βρείτε τις τιμές $f(-3)$ και $f(-2)$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.
- iv) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

 **13.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln^2|x| + \ln x^2.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$, $f(e)$ και $f\left(\frac{1}{e}\right)$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(e)$.
- iv) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in D_f$.

 **14.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(1)$ και $f(-2)$.
- iii) Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - α) $f(\eta\mu x - 2) = 9$
 - β) $f(e^x) = 2$.

 **15.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + 5}{x^2 + \alpha}$ τέτοια, ώστε $f(2) = 1$.

Βλέπε
λυμένη
5

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.
- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{a - x^2}$ τέτοια, ώστε $f(3) = 4$.

Να βρείτε την τιμή του a και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

17. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x-1)\ln(x+\alpha) + \beta x$$

για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$.

- i) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .
 ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

-  18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x - \alpha, & x \leq 0 \\ x^2 + \beta x, & x > \alpha \end{cases}$

Βλέπε
λυμένη
6

τέτοια, ώστε $f(0) = 0$ και $f(4) = 8$.

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -2$.
 ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

19. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta, & x \leq 0 \\ \beta \ln x + \alpha, & x > 0 \end{cases}$$

για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(0) = 1$ και $f(1) = 4$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 ii) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

-  20. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
7

i) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4x+\lambda}$

ii) $f(x) = \frac{x}{\eta \mu x - \lambda}$

iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - \lambda x + 1}$

iv) $f(x) = \ln(x^2 + \lambda x + 4)$.

▣ Κατασκευή συνάρτησης σε πρόβλημα

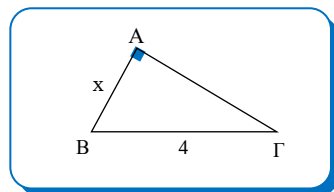
21. Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών x, y είναι ίσο με 50. Να εκφράσετε το γινόμενο τους ως συνάρτηση του x .

22. Το γινόμενο δύο αριθμών x και y είναι ίσο με 10. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το άθροισμά τους.

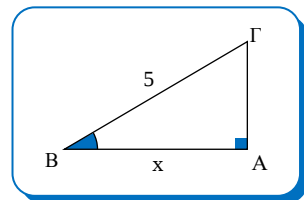
23. Δίνεται η ευθεία: $\varepsilon: y = 2x - 3$ και το σημείο της $M(x, y)$. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την απόσταση του M από την αρχή των αξόνων.

-  **24.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ η οποία έχει μήκος 4 cm. Να εκφράσετε την περίμετρο S και το εμβαδό E του τριγώνου ως συνάρτηση του $x = AB$.

Βλέπε
λυμένη
8



-  **25.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ η οποία έχει μήκος 5 cm. Να εκφράσετε το ημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας B ως συνάρτηση του $x = AB$.



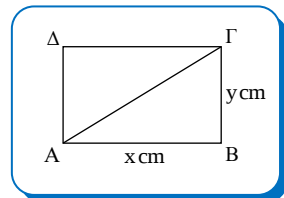
-  **26.** Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με περίμετρο $\Pi = 14$ cm και πλευρά $AB = x$ cm. Να αποδείξετε ότι:

- i) το εμβαδό E του ορθογωνίου εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = -x^2 + 7x, \quad x \in (0, 7)$$

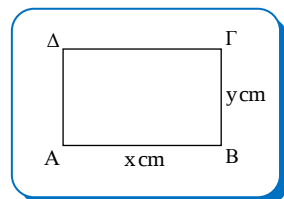
- ii) το μήκος δ της διαγωνίου του ορθογωνίου εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$\delta(x) = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}, \quad x \in (0, 7).$$



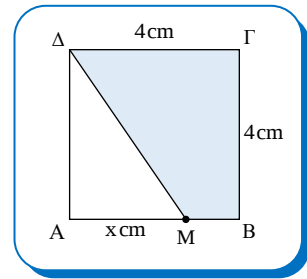
- 27.** Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με μήκη πλευρών $AB = x$ cm και $B\Gamma = y$ cm το οποίο έχει εμβαδό $E = 9$ cm².

- i) Να εκφράσετε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .
ii) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου είναι τουλάχιστον 12 cm.



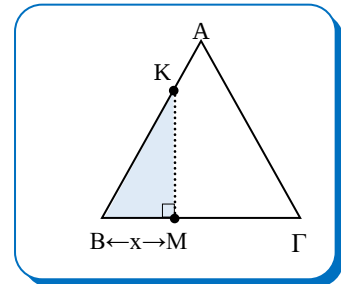
-  **28.** Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $AB = 4\text{ cm}$. Στο εσωτερικό της AB θεωρούμε σημείο M τέτοιο, ώστε $AM = x\text{ cm}$.

- i) Να εκφράσετε το μήκος S του τμήματος ΔM ως συνάρτηση του x .
 ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τετραπλεύρου $MB\Gamma\Delta$ δίνεται από τη συνάρτηση
 $E(x) = 16 - 2x$, $x \in (0, 4)$.

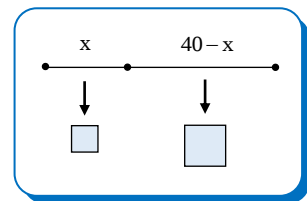


-  **29.** Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 cm . Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x = BM$, όταν το σημείο M διαγράφει το εσωτερικό της $B\Gamma$.

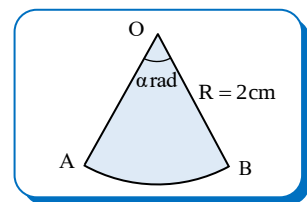
Βλέπε
λυμένη
9



-  **30.** Ένα κομμάτι σύρμα μήκους 40 cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη $x\text{ cm}$ και $(40 - x)\text{ cm}$. Στη συνέχεια λυγίζονται και τα δύο κομμάτια σε σχήμα τετραγώνου. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων ως συνάρτηση του x .



-  **31.** Δίνεται κυκλικός τομέας OAB γωνίας $\alpha\text{ rad}$ και ακτίνας $R = 2\text{ cm}$. Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδό E του κυκλικού τομέα συναρτήσει της γωνίας θ .



-  **32.** Το κόστος $K(x)$, σε ευρώ, της παραγωγής x τόνων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000, \quad 0 < x < 50.$$

Όταν παράγονται x τόνοι αυτού του προϊόντος, η είσπραξη από την πώληση ενός τόνου αυτού του προϊόντος είναι $420 - 2x$ ευρώ.

- i) Να αποδείξετε ότι η είσπραξη $E(x)$, σε ευρώ, από την πώληση x τόνων αυτού του προϊόντος δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = 420x - 2x^2, \quad x \in (0, 50).$$

- ii) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το κέρδος $P(x)$ από την πώληση x τόνων του παραπάνω προϊόντος.

- 33.** Η παραγωγή x τόνων ενός βιομηχανικού προϊόντος από ένα εργοστάσιο, κοστίζει

$$K(x) = 5x^2 + 700x - 100 \text{ €}, \quad 0 < x < 10.$$

Η τιμή πώλησης ενός τόνου είναι $760 - x$ €.

Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το κέρδος $P(x)$ του εργοστασίου από την πώληση x τόνων αυτού του προϊόντος.

▣ Γενικές ασκήσεις

-  **34.** Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

Βλέπε
λυμένη
10

- i) $(f(x))^3 + f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 ii) $(f(x))^5 + 2f(x) = x^3 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 iii) $(f(x))^3 + (f(x))^2 + f(x) = 1 - e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 35.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$(f(x))^3 + f(x) = x^2 - x + 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f παίρνει μόνο θετικές τιμές.

- 36.** Έστω συνάρτηση $f: (a, a + 14) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή

- i) Να βρείτε την τιμή του a .
 ii) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

- 37.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια και περιττή.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Κριτήριο αξιολόγησης 1

Θέμα Α

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

A1. $f(x) = \frac{x-1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$

A2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

A3. $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

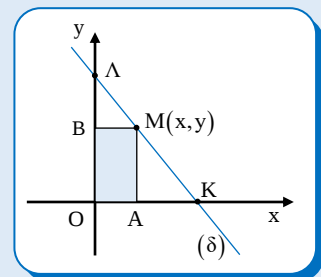
A4. $f(x) = \frac{\ln(4 - |x|)}{x}$.

Θέμα Β

Στο διπλανό σχήμα το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος $ΚΛ$ που ορίζει η ευθεία $\varepsilon: y = -2x + 8$ με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy . Αν A, B είναι οι αντίστοιχες προβολές του M στους ημιάξονες Ox, Oy , να εκφράσετε ως συνάρτηση του x :

B1. την περίμετρο του ορθογωνίου $OAMB$

B2. το εμβαδό του ορθογωνίου $OAMB$.





Μάθημα 2

Προτεινόμενες διδακτικές ώρες: 1

Σύνολο τιμών συνάρτησης

Γνωρίζουμε ότι σε μία συνάρτηση $f(x)$ το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο που αποτελείται από όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η ανεξάρτητη μεταβλητή x . Το σύνολο που αποτελείται από όλες τις τιμές $f(x)$ είναι λογικό, να το ονομάσουμε σύνολο τιμών της συνάρτησης. Έτσι, αν έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$, το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(A) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{1, 4, 9\}$. Έχουμε λοιπόν, τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός (συνόλου τιμών συνάρτησης)

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή,

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

Βασικές επισημάνσεις

- Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λοιπόν αποτελείται από όλους τους αριθμούς y για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο σύνολο A .

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = 2x - 1$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ αφού για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 1 = y$ έχει λύση (την $x = \frac{y+1}{2}$).

- Ένας αριθμός y_0 ανήκει στο σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = y_0$. Δηλαδή, αν και μόνο αν η εξίσωση $f(x) = y_0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο σύνολο A .

Παράδειγμα

Ο αριθμός 8 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^3$ αφού η εξίσωση $f(x) = 8 \Leftrightarrow x^3 = 8$ έχει λύση (την $x = 2$).

Παράδειγμα

Ο αριθμός -1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^2$ διότι η εξίσωση $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$ είναι αδύνατη αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 \geq 0$.

- Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα μη κενό σύνολο B , τότε με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Δηλαδή,

$$f(B) = \{y / y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}.$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και συνεπώς είναι ορισμένη στο διάστημα $[-2, 5]$. Οπότε, το σύνολο τιμών της f στο $[-2, 5]$ το συμβολίζουμε με $f([-2, 5])$ και ισχύει $f([-2, 5]) = \{y / y = f(x), x \in [-2, 5]\}$.

Σύνολο τιμών βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση	Σύνολο τιμών
$f(x) = c$	$f(\mathbb{R}) = \{c\}$
$f(x) = \alpha x + \beta, \alpha \neq 0$	$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
$f(x) = \alpha x^2, \alpha > 0$	$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$
$f(x) = \alpha x^2, \alpha < 0$	$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$
$f(x) = \alpha x^3, \alpha \neq 0$	$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$
$f(x) = \eta \mu x$	$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
$f(x) = \sigma \nu \nu x$	$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
$f(x) = \varepsilon \varphi x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$
$f(x) = \sigma \varphi x, x \in (0, \pi)$	$f((0, \pi)) = \mathbb{R}$
$f(x) = \alpha^x, 0 < \alpha \neq 1$	$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$
$f(x) = \ln x$	$f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$



Πρόταση μελέτης

Όλες οι λυμένες ασκήσεις και από τις ασκήσεις για λύση οι:

1, 3, 4, 5, 8, 10, 11.



Λυμένες ασκήσεις

■ Η έννοια του συνόλου τιμών

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

Λύση

i) Έχουμε

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα, $f(0) = 1$ και συνεπώς το 1

ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

ii) Έχουμε

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow 2(x^2 + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = -1, \text{ που είναι αδύνατη αφού}$$

$$2x^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, ο αριθμός 2 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

Σημείωση

Ένας αριθμός y_0 ανήκει στο σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f η εξίσωση $f(x) = y_0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού A της f .

■ Εύρεση συνόλου τιμών

2. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις f να βρείτε τις τιμές του $y \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα. Στη συνέχεια, να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

i) $f(x) = 4x - 3$

ii) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

iii) $f(x) = 2\eta\mu x + 5$

iv) $f(x) = e^x - 2$.

Λύση

i) Έχουμε $D_f = \mathbb{R}$ και

$$f(x) = y \Leftrightarrow 4x - 3 = y \Leftrightarrow 4x = y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{4}.$$

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Οπότε, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

ii) Έχουμε $D_f = \mathbb{R}$ και

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = y \Leftrightarrow x^2 + 4x + (5 - y) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει λύση (στο $D_f = \mathbb{R}$) αν και μόνο αν

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 4(5 - y) \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 20 + 4y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4y \geq 4 \Leftrightarrow y \geq 1.$$

Οπότε, $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$.

iii) Έχουμε $D_f = \mathbb{R}$ και

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2\eta\mu x + 5 = y \Leftrightarrow 2\eta\mu x = y - 5$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{y-5}{2}.$$

Η εξίσωση αυτή έχει λύση (στο $D_f = \mathbb{R}$) αν και μόνο αν

$$-1 \leq \frac{y-5}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq y - 5 \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 7.$$

Οπότε, $f(\mathbb{R}) = [3, 7]$.

iv) Έχουμε $D_f = \mathbb{R}$ και

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^x - 2 = y \Leftrightarrow e^x = y + 2.$$

Η εξίσωση αυτή έχει λύση (στο $D_f = \mathbb{R}$) αν και μόνο αν $y + 2 > 0 \Leftrightarrow y > -2$.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ και επιχειρούμε να τη λύσουμε ως προς x . Το σύνολο τιμών της f προκύπτει από όλους τους περιορισμούς (συνθήκες) που πρέπει να ικανοποιεί το y ώστε η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει λύση ως προς $x \in A$. Αν δεν προκύψει κανένας περιορισμός για το y , τότε το σύνολο τιμών της f είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Οπότε, $f(\mathbb{R}) = (-2, +\infty)$.

▣ Γενικές ασκήσεις

3. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \eta\mu x$ είναι αδύνατη.
- ii) Να βρείτε τις τιμές του $a \geq 0$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = \sqrt{a} - 1$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα.
- iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = 3f(x) - 4, x \in \mathbb{R}$.

Λύση

i) Με βάση το σύνολο τιμών της f προκύπτει ότι

$$f(x) > 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Όμως,

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \text{ κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$f(x) > \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς η εξίσωση

$$f(x) = \eta\mu x$$

είναι αδύνατη.

ii) Η εξίσωση $f(x) = \sqrt{a} - 1$ έχει ρίζα αν και μόνο αν ο αριθμός $\sqrt{a} - 1$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f . Δηλαδή,

$$\sqrt{a} - 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} > 2 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 > 2^2 \Leftrightarrow a > 4.$$

iii) Έχουμε

$$g(x) = y \Leftrightarrow 3f(x) - 4 = y \Leftrightarrow 3f(x) = y + 4 \Leftrightarrow f(x) = \frac{y+4}{3}.$$

Η εξίσωση αυτή έχει λύση, ως προς x , όταν $\frac{y+4}{3} \in f(\mathbb{R})$ δηλαδή, όταν

$$\frac{y+4}{3} \in (1, +\infty) \Leftrightarrow \frac{y+4}{3} > 1 \Leftrightarrow y+4 > 3 \Leftrightarrow y > -1.$$

Σχόλιο

Γενικά, όταν τα σύνολα τιμών δύο συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό στοιχείο, τότε η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη.

Άρα, $g(\mathbb{R}) = (-1, +\infty)$.



Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

- Όταν για μια συνάρτηση f γράφουμε $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ δηλώνουμε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Ένας αριθμός y ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν υπάρχει $x \in A$ τέτοιος ώστε $y = f(x)$.
- Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ αποτελείται από όλους τους αριθμούς y για τους οποίους η εξίσωση $y = f(x)$ έχει λύση στο A .
- Αν a είναι πραγματικός αριθμός για τον οποίο η εξίσωση $f(x) = a$ είναι αδύνατη, ο a δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
- Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει λύση αν και μόνο αν $\kappa \in f(A)$.
- Αν η εξίσωση $f(x) = a$ έχει λύση για κάθε $a \in \mathbb{R}$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$.
- Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.
- Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ έχει σύνολο τιμών το μονοσύνολο $\{c\}$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Υπάρχει συνάρτηση η οποία είναι περιττή με σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.



Ασκήσεις για λύση

■ Η έννοια του συνόλου τιμών

-  1. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 3 ανήκει στο σύνολο τιμών της f , όταν:

Βλέπε
λυμένη
1

i) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$

ii) $f(x) = |x| + 1$

$$\text{iii)} \quad f(x) = x^3 + 4$$

$$\text{iv)} \quad f(x) = e^x + 2.$$

 **2.** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 5 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f , όταν:

$$\text{i)} \quad f(x) = \frac{5x}{x-1}$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = |x| + 6$$

$$\text{iii)} \quad f(x) = x^2 + 1, \quad x \in (3, +\infty)$$

$$\text{iv)} \quad f(x) = 4\eta\mu x.$$

 **3.** Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f , όταν:

Βλέπε
λυμένη
1

$$\text{i)} \quad f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = \sqrt{x-3} + 1$$

$$\text{iii)} \quad f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

$$\text{iv)} \quad f(x) = e^x + \pi.$$

■ Εύρεση συνόλου τιμών συνάρτησης

 **4.** Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις f να βρείτε τις τιμές του $y \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση. Στη συνέχεια, να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

Βλέπε
λυμένη
2

$$\text{i)} \quad f(x) = 2x + 5$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = x^4 + 3$$

$$\text{iii)} \quad f(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\text{iv)} \quad f(x) = 8x^3.$$

 **5.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f όταν:

$$\text{i)} \quad f(x) = \sqrt{x-3} + 5$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = e^x + 1$$

$$\text{iii)} \quad f(x) = \ln x + 4$$

$$\text{iv)} \quad f(x) = |x+1| - 2.$$

6. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f όταν:

$$\text{i)} \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = 2\eta\mu x + 1$$

$$\text{iii)} \quad f(x) = e^{|x|}$$

$$\text{iv)} \quad f(x) = \sqrt{\ln x}.$$

■ Γενικές ασκήσεις

7. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad x \in [0, 2].$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$-4 \leq f(x) \leq 6 \quad \text{για κάθε } x \in [0, 2].$$

- ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 6$ είναι αδύνατη.
 iii) Να εξετάσετε αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-4, 6]$.



8.

Βλέπε
λυμένη
3

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ να έχει λύση αν και μόνο αν $\lambda > 0$.

- i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \sin x - 1$ είναι αδύνατη.
 iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = 2 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

9. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x) = y$ είναι αδύνατη για κάθε $y < 2$, να βρείτε ποια από τα παρακάτω σύνολα μπορούν να είναι σύνολα τιμών της f .

- α) $\mathbb{R}$ β) $[2, +\infty)$ γ) $(3, 10]$ δ) $(0, +\infty)$.



10. Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $f(A) = (2, +\infty)$.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία, τουλάχιστον, ρίζα.

- i) $f(x) = |\alpha|$ ii) $f(x) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}$
 iii) $f(x) = e^{-\alpha} + 1$ iv) $f(x) = 1 - \ln \alpha$.



11. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = [-1, 6]$.

- i) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν λύση αιτιολογώντας την απάντησή σας:

- α) $f(x) = 0$ β) $f(x) = -1$
 γ) $f(x) = 6$ δ) $f(x) = -2$.

- ii) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = \kappa^3 - 2$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

12. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (-1, +\infty)$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) = f(x)$ έχει δύο, τουλάχιστον, λύσεις.

- ii) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = \sin \alpha$ είναι αδύνατη.



Κριτήριο αξιολόγησης 2

Θέμα Α

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{7x}{x^2 + 6} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- A1.** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
A2. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2 - 6x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = y$$

έχει λύση αν και μόνο αν

$$y \geq -9.$$

- B2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
B3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες οι τιμές της συνάρτησης

$$g(x) = 1 - |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

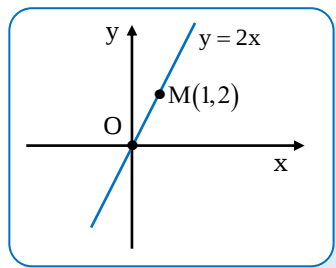
ανήκουν στο σύνολο τιμών της f .



Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Από τον τύπο της f έχουμε $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6 \dots$ και γενικά $f(x) = 2x$. Έτσι, δημιουργούνται τα διατεταγμένα ζεύγη $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6) \dots$ και γενικά $(x, f(x))$, δηλαδή $(x, 2x)$ τα οποία παριστάνουν σημεία του επιπέδου Oxy . Το σύνολο όλων αυτών των σημείων αποτελεί μία ευθεία. Η ευθεία αυτή, που έχει εξίσωση $y = 2x$, λέμε ότι είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Γενικά, έχουμε τον παρακάτω ορισμό:



Ορισμός (γραφικής παράστασης συνάρτησης)

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

Βασικές επισημάνσεις

- Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

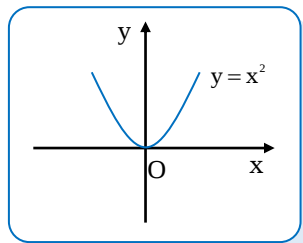
Παράδειγμα

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

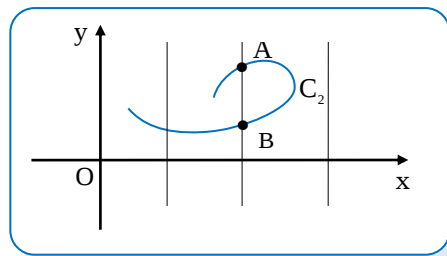
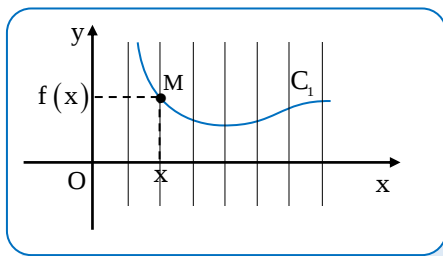
$$f(x) = x^2$$

είναι παραβολή με εξίσωση

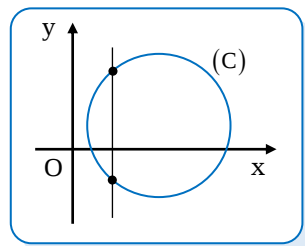
$$y = x^2.$$



- Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο. Έτσι, στα παρακάτω σχήματα, η καμπύλη C_1 είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης f , ενώ η καμπύλη C_2 όχι, αφού στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει μία, τουλάχιστον, κατακόρυφη ευθεία που τέμνει τη C_2 σε δύο σημεία.



Οπότε, ένας κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

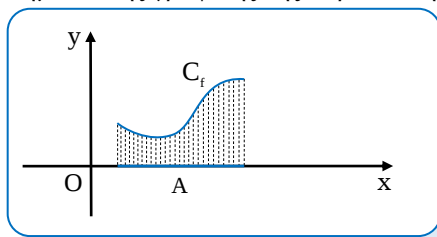


- Ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν ισχύει $f(a) = \beta$.

Παράδειγμα

Το σημείο $M(1, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 2x$ αφού $f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$. Το σημείο $N(0, 1)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f επειδή $f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 = 0 \neq 1$.

- Το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της γραφικής της παράστασης.

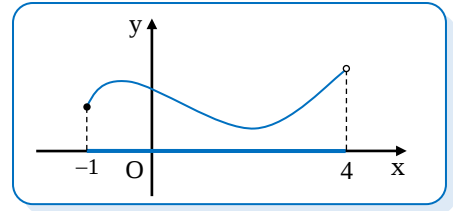


Παρατήρηση

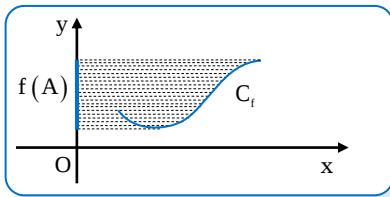
Αντιλαμβανόμαστε γεωμετρικά το πεδίο ορισμού A της f ως την προβολή της C_f στον άξονα $x'x$.

Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [-1, 4)$.



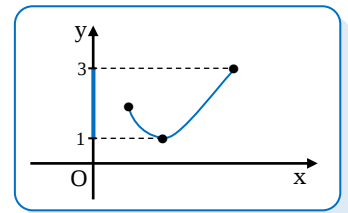
- Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της γραφικής της παράστασης.

**Παρατήρηση**

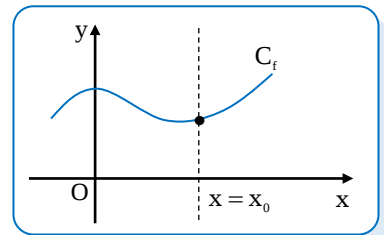
Αντιλαμβανόμαστε γεωμετρικά το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ως την προβολή της C_f στον άξονα $y'y$.

Παράδειγμα

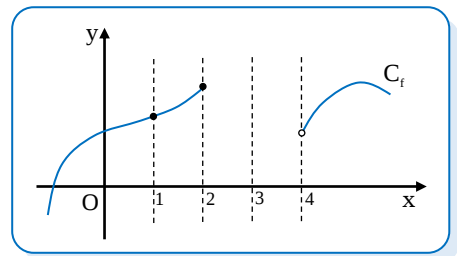
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A . Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = [1, 3]$.



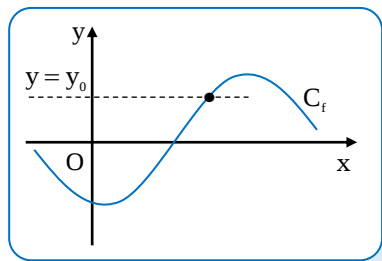
- Ένας αριθμός x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν η κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$ έχει κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f .

**Παράδειγμα**

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A . Οι αριθμοί 1 και 2 ανήκουν στο A γιατί οι κατακόρυφες ευθείες $x = 1$ και $x = 2$ τέμνουν τη C_f . Όμως, οι αριθμοί 3 και 4 δεν ανήκουν στο A γιατί οι κατακόρυφες ευθείες $x = 3$ και $x = 4$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο με τη C_f .

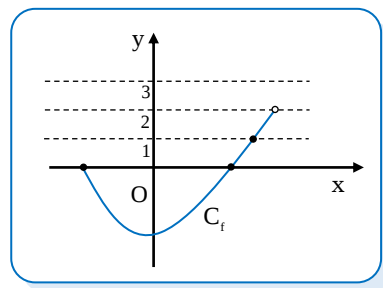


- Ένας αριθμός y_0 ανήκει στο σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν η οριζόντια ευθεία $y = y_0$ έχει ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f .

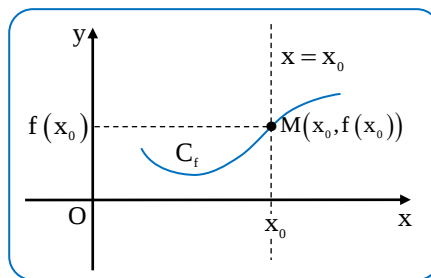


Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A . Οι αριθμοί 0 και 1 ανήκουν στο σύνολο τιμών $f(A)$ γιατί οι οριζόντιες ευθείες $y = 0$ (άξονας $x'x$) και $y = 1$ τέμνουν τη C_f . Όμως, οι αριθμοί 2 και 3 δεν ανήκουν στο $f(A)$ αφού οι οριζόντιες ευθείες $y = 2$ και $y = 3$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο με τη C_f .

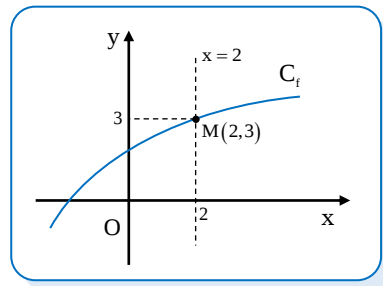


- Η τιμή της f σε κάθε $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ με τη C_f .



Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A . Η ευθεία $x = 2$ τέμνει τη C_f στο σημείο $M(2,3)$. Επομένως, $f(2) = 3$.



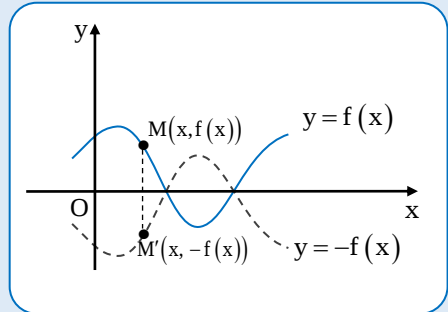
• Αντίθετη συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ονομάζουμε **αντίθετη της f** και συμβολίζουμε με $-f$ τη συνάρτηση $-f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$(-f)(x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in A.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$ γιατί, αποτελείται από τα σημεία

$M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$ ως προς τον άξονα $x'x$.



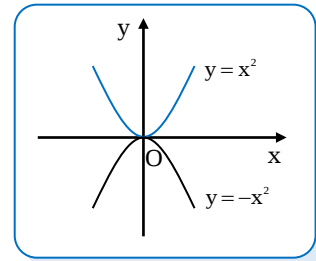
Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση $-f$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο

$$(-f)(x) = -f(x) = -x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

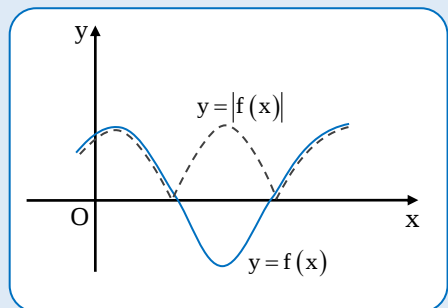


• Απόλυτη τιμή συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ονομάζουμε **απόλυτη τιμή της f** και συμβολίζουμε με $|f|$ τη συνάρτηση $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$|f|(x) = |f(x)| \text{ για κάθε } x \in A.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, στον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.



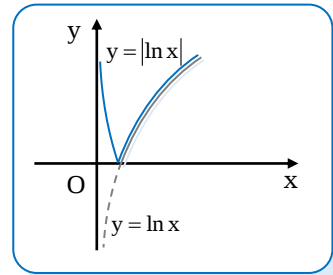
Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

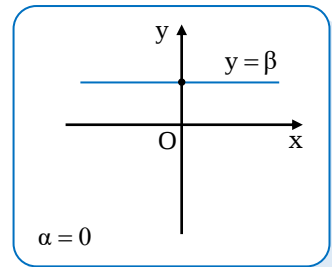
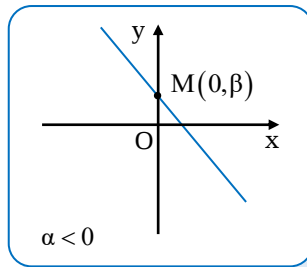
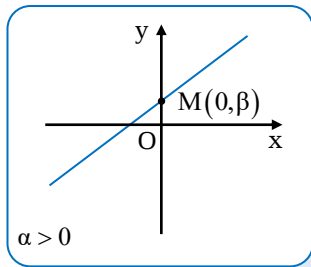
$$f(x) = \ln x \text{ για κάθε } x > 0.$$

Η συνάρτηση $|f|$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ και τύπο

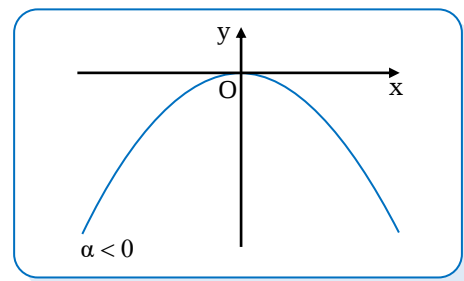
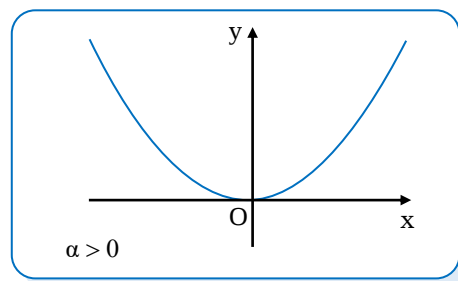
$$|f|(x) = |f(x)| = |\ln x| \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων**

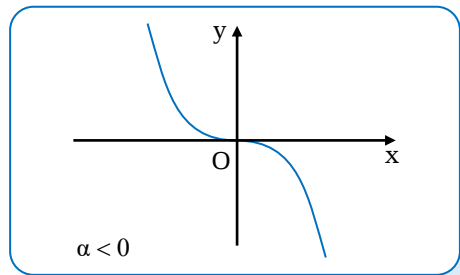
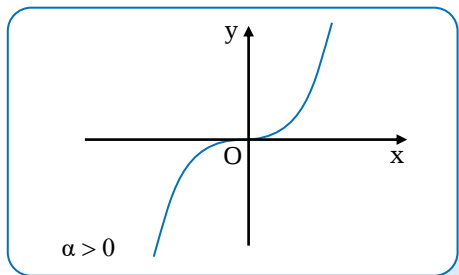
Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$



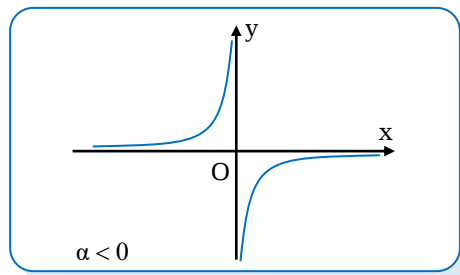
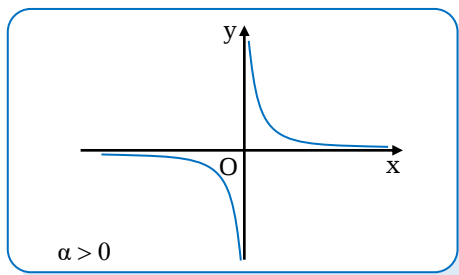
Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2, \alpha \neq 0$



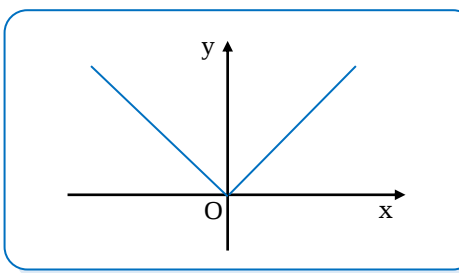
Η συνάρτηση $f(x) = ax^3, a \neq 0$



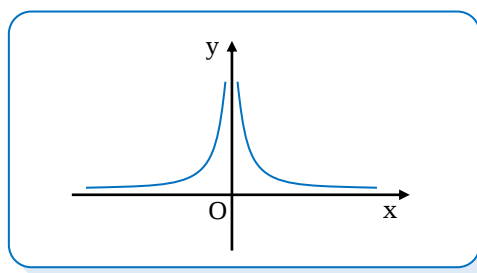
Η συνάρτηση, $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$



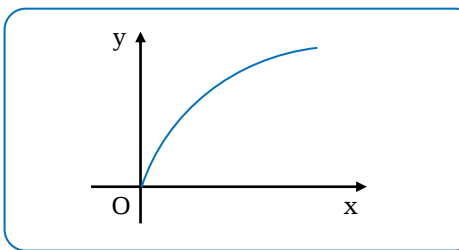
Η συνάρτηση $f(x) = |x|$



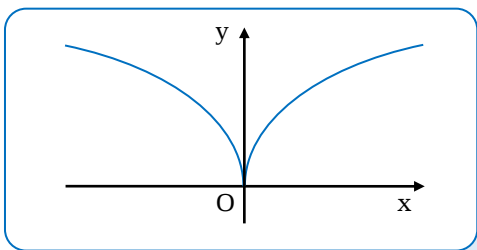
Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{|x|}$



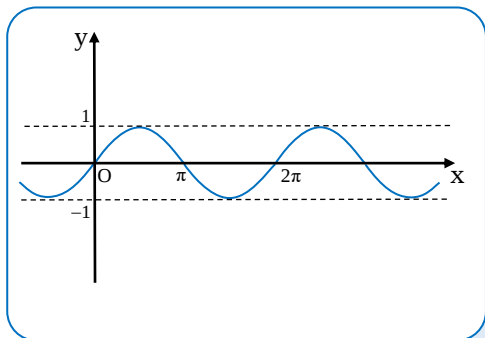
Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$



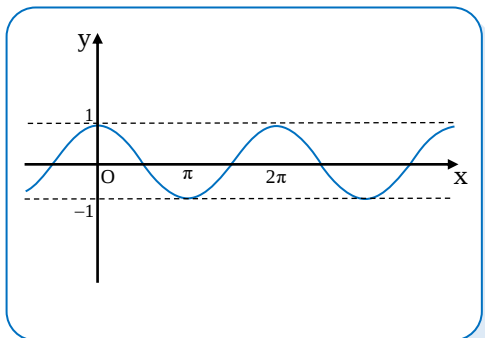
Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}$



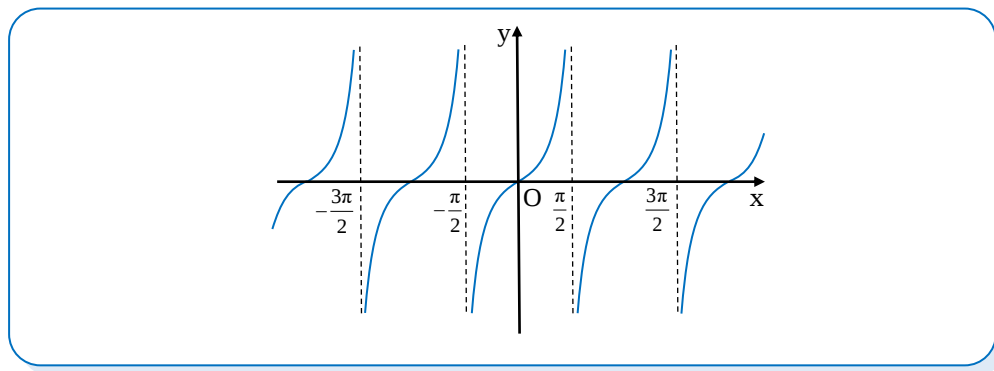
Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$



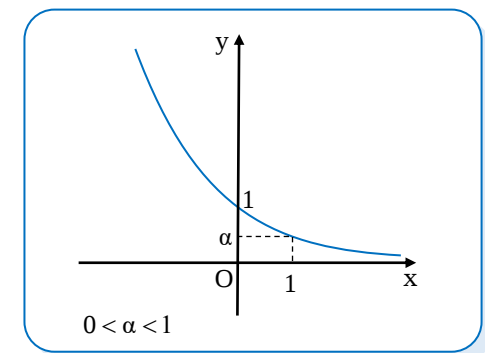
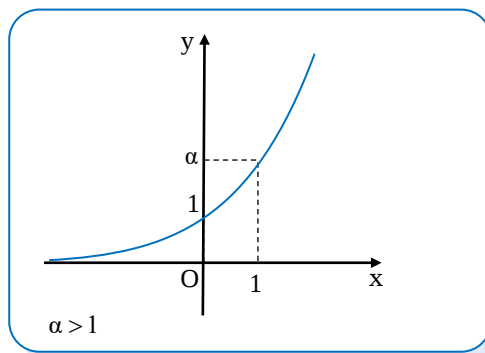
Η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$



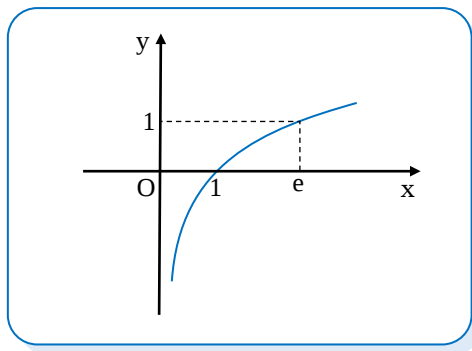
Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$



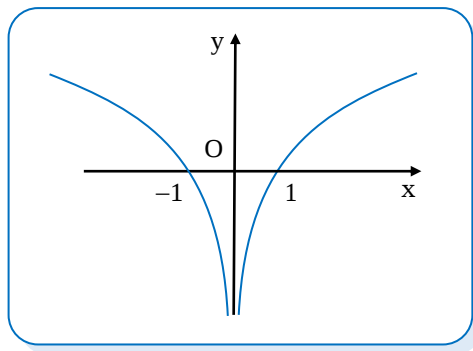
Η συνάρτηση, $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$



Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$



Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$

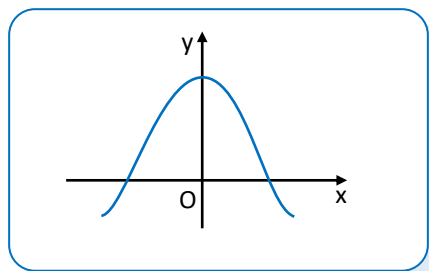


Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται **άρτια** αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.



Παράδειγμα

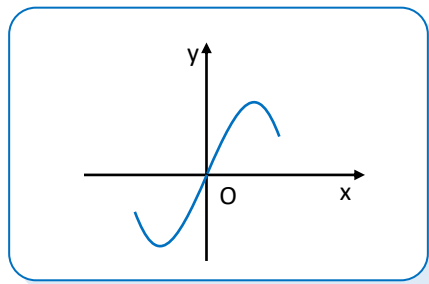
Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι άρτια αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται **περιττή** αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.



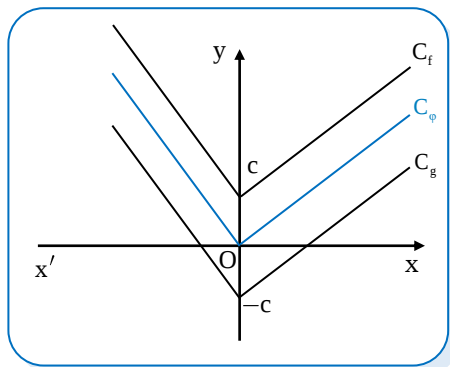
Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι περιττή αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \varphi(x) + c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μία **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \varphi(x) - c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μία **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα κάτω.

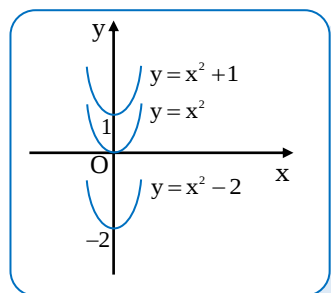


Παράδειγμα

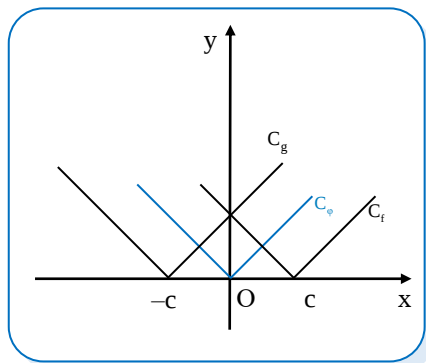
Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$\varphi(x) = x^2, \quad f(x) = x^2 + 1$$

$$\text{και } g(x) = x^2 - 2.$$



- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \varphi(x - c)$, όπου $c > 0$ προκύπτει από μία **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \varphi(x + c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μία **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

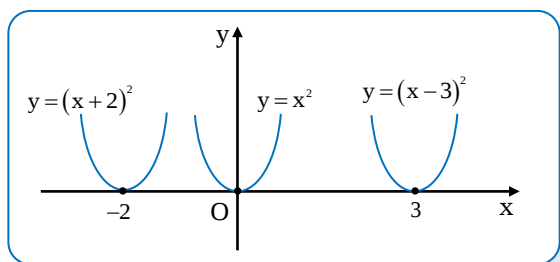


Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$\varphi(x) = x^2, \quad f(x) = (x - 3)^2$$

$$\text{και } g(x) = (x + 2)^2.$$





Πρόταση μελέτης

Όλες οι λυμένες ασκήσεις και από τις ασκήσεις για λύση οι:
2, 3, 5, 7, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 30.



Λυμένες ασκήσεις

■ Γραφικές παραστάσεις

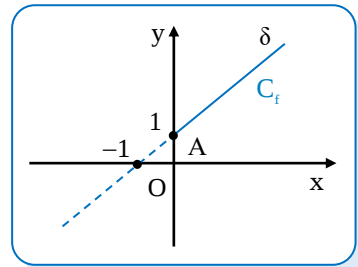
1. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν:
- $f(x) = x + 1, x \in [0, +\infty)$
 - $f(x) = \ln x, x \in (1, e]$.

Λύση

- i) Η γραφική παράσταση της f είναι η ημιευθεία

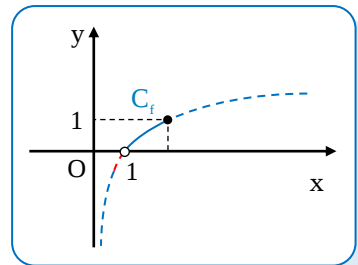
$$Αδ: y = x + 1 \text{ με } x \geq 0.$$

Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να σχεδιάσουμε την ευθεία $y = x + 1$ και στη συνέχεια να επιλέξουμε τα σημεία της με τετμημένη $x \geq 0$.



- ii) Η γραφική παράσταση της f είναι το σύνολο των σημείων της καμπύλης $y = \ln x$ με $1 < x \leq e$.

Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να σχεδιάσουμε την καμπύλη $y = \ln x$ και στη συνέχεια να επιλέξουμε τα σημεία της με τετμημένη $1 < x \leq e$.

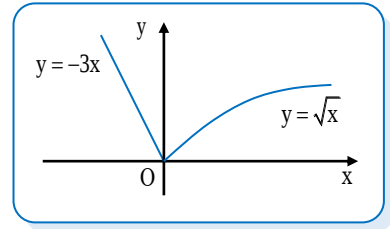


2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν:

i) $f(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ii) $f(x) = \frac{3|x| - x}{2}$.

Λύση

i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $y = -3x$ με $x \leq 0$ καθώς επίσης και τα σημεία της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ με $x > 0$.



ii) • Αν $x \geq 0$, τότε $|x| = x$ και συνεπώς

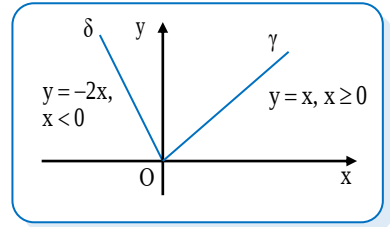
$$f(x) = \frac{3|x| - x}{2} = \frac{3x - x}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

• Αν $x < 0$, τότε $|x| = -x$ και συνεπώς

$$f(x) = \frac{3|x| - x}{2} = \frac{-3x - x}{2} = \frac{-4x}{2} = -2x.$$

Επομένως, $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0. \end{cases}$

Άρα, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $y = x$ για $x \geq 0$ δηλαδή, από την ημιευθεία Ογ και από τα σημεία της ευθείας $y = -2x$ για $x < 0$ δηλαδή από την ημιευθεία Οδ.



Σχόλιο

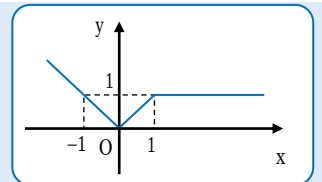
Γράφουμε τον τύπο της f σε πιο απλή μορφή. Οπότε, πρέπει να απαλλαγούμε από το σύμβολο της απόλυτης τιμής. Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις $x \geq 0$, $x < 0$.

■ Εύρεση συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση

3. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που αποτελείται από δύο ημιευθείες και ένα ευθύγραμμο τμήμα. Να βρείτε:

i) τον τύπο της f

ii) την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο $M(-a^2, 4a - 4)$ ανήκει στην C_f .



Λύση

- i) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της καμπύλης $y = |x|$ με τετμημένες $x \leq 1$ καθώς επίσης και τα σημεία της ημιευθείας $y = 1$ με $x > 1$. Επομένως,

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

- ii) Το σημείο $M(-\alpha^2, 4\alpha - 4)$ ανήκει στη C_f αν και μόνο αν $f(-\alpha^2) = 4\alpha - 4$.

Και επειδή $-\alpha^2 \leq 0 < 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$|-\alpha^2| = 4\alpha - 4 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

▣ Πληροφορίες από τη C_f για την f

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = -(x-3)^2 + 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

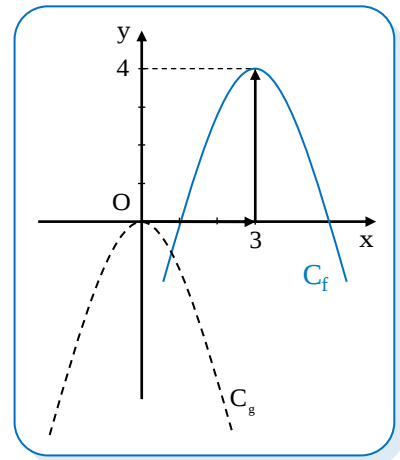
- i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
 ii) Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

- i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = -x^2$$

κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και στη συνέχεια κατά 4 μονάδες προς τα πάνω.



- ii) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(\mathbb{R})$ των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασης. Επομένως,

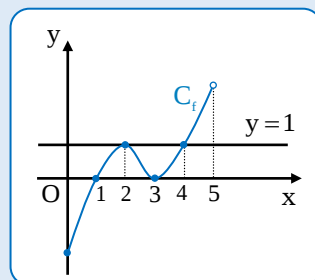
$$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 4].$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f αρκεί να βρούμε το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f .

5. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$.

- i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(f(x)) < 0$.



Λύση

- i) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με τον άξονα $x'x$ που είναι οι αριθμοί 1 και 3. Άρα, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.
- ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$. Δηλαδή, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3) \cup (3, 5)$.
- iii) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = 1$. Επομένως, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 4$.

Μεθοδολογία

Για να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ αρκεί να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$.

Μεθοδολογία

Για να λύσουμε την ανίσωση $f(x) > 0$ αρκεί να βρούμε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μεθοδολογία

Για να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = \kappa$ αρκεί να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = \kappa$.

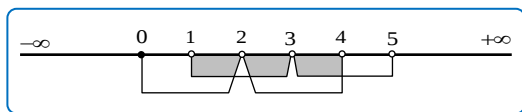
- iv) Η δοθείσα ανίσωση ορίζεται για εκείνα τα x ώστε $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3) \cup (3, 5)$.

Για αυτά τα x έχουμε

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) < 0 &\Leftrightarrow \ln(f(x)) < \ln 1 \Leftrightarrow f(x) < 1 \\ &\Leftrightarrow x \in [0, 2) \cup (2, 4). \end{aligned}$$

Τελικά, οι λύσεις της ανίσωσης $\ln(f(x)) < 0$ είναι οι αριθμοί

$$x \in (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4)$$



Μεθοδολογία

Για να λύσουμε την ανίσωση $f(x) < \kappa$ αρκεί να βρούμε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = \kappa$.

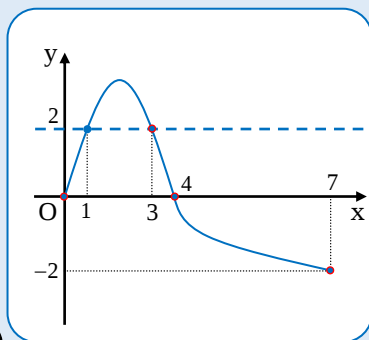
6. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης

$$f: [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g όταν:

i) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ii) $g(x) = \frac{1}{f(x) - 2}$

iii) $g(x) = \sqrt{f(x)}$ iv) $g(x) = \ln(2 - f(x))$.



Λύση

- i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g αποτελείται από εκείνα τα $x \in [0, 7]$ για τα οποία ισχύει $f(x) \neq 0$. Όμως, η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 0 και 4. Δηλαδή,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4.$$

Επομένως, $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 4$.

Τελικά, $D_g = D_f - \{0, 4\} = (0, 4) \cup (4, 7]$.

- ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g αποτελείται από εκείνα τα $x \in [0, 7]$ για τα οποία ισχύει $f(x) - 2 \neq 0$. Όμως, η C_f τέμνει την ευθεία $y = 2$ στα σημεία με τετμημένες 1 και 3. Δηλαδή,

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3.$$

Επομένως, $f(x) \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 3$.

Τελικά, $D_g = D_f - \{1, 3\} = [0, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 7]$.

- iii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g αποτελείται από εκείνα τα $x \in [0, 7]$ για τα οποία ισχύει $f(x) \geq 0$. Όμως, από τη C_f προκύπτει ότι $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 4]$.

Επομένως, $D_g = [0, 4]$.

- iv) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g αποτελείται από εκείνα τα $x \in [0, 7]$ για τα οποία ισχύει $2 - f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 2$.

Όμως, οι λύσεις της τελευταίας ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2$. Δηλαδή,

$$f(x) < 2 \Leftrightarrow x \in [0, 1) \cup (3, 7].$$

Επομένως, $D_g = [0, 1) \cup (3, 7]$.

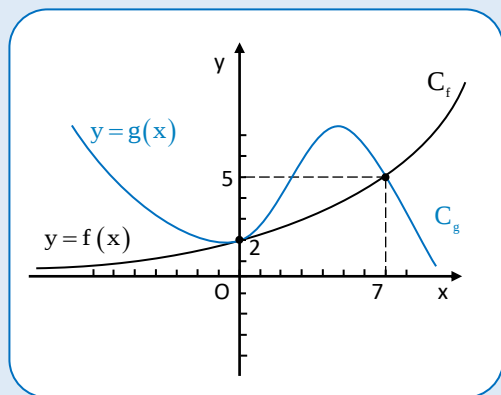
7. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- i) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = g(x).$$

- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < g(x).$$



Λύση

- i) Οι ρίζες της εξίσωσης

$$f(x) = g(x)$$

είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , δηλαδή οι αριθμοί 0 και 7.

Μεθοδολογία

Για να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ αρκεί να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g .

- ii) Οι λύσεις της ανίσωσης

$$f(x) < g(x)$$

είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τη γραφική παράσταση της g , δηλαδή όλοι οι αριθμοί $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 7)$.

Μεθοδολογία

Για να λύσουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$ αρκεί να βρούμε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τα αντίστοιχα σημεία της C_g .

■ Πληροφορίες από την f για τη C_f

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + a - 1$, που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, -6)$. Να βρείτε:
- i) την τιμή του a
 - ii) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$
 - iii) τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

- i) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(2, -6)$ οπότε,

$$f(2) = -6 \Leftrightarrow 2^2 - a \cdot 2 + a - 1 = -6 \Leftrightarrow -a = -9 \Leftrightarrow a = 9.$$

- ii) Έχουμε $D_f = \mathbb{R}$ και με βάση το ερώτημα

- i) $f(x) = x^2 - 9x + 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως:

$$\bullet \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 8.$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$. Τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(8, 0)$.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

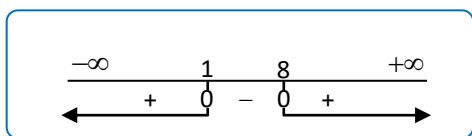
$$f(x) = 0.$$

- $f(0) = 0^2 - 9 \cdot 0 + 8 = 8$.

Δηλαδή, η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$, το σημείο $\Gamma(0,8)$.

- iii) Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, αν και μόνο αν

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 > 0$$



ή ισοδύναμα $x \in (-\infty, 1) \cup (8, +\infty)$.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $y'y$ αρκεί να βρούμε την τιμή $f(0)$. Είναι φανερό ότι το παραπάνω σημείο υπάρχει μόνο όταν ο αριθμός 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(x) > 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = x$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$.

Λύση

i) Έχουμε

$$f(x) = x \Leftrightarrow \ln \frac{e^x + 1}{2} = x \Leftrightarrow \ln \frac{e^x + 1}{2} = \ln e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x + 1}{2} = e^x \Leftrightarrow e^x + 1 = 2e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$, το σημείο $O(0,0)$.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x$, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x) = x.$$

- ii) Αναζητούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\begin{aligned} f(x) < x &\Leftrightarrow \ln \frac{e^x + 1}{2} < x \Leftrightarrow \ln \frac{e^x + 1}{2} < \ln e^x \\ &\Leftrightarrow \frac{e^x + 1}{2} < e^x \Leftrightarrow e^x + 1 < 2e^x \\ &\Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0. \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$ αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(x) < x$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^3 - 4x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 12x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία των C_f και C_g
 ii) τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

Λύση

- i) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^3 - 4x + 1 = 12x + 1 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 16) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -4. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$g(0) = 1, \quad g(4) = 49 \quad \text{και} \quad g(-4) = -47.$$

Άρα, τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι:

$$A(0, 1), \quad B(4, 49) \quad \text{και} \quad \Gamma(-4, -47).$$

- ii) Οι ζητούμενες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ είναι εκείνες για τις οποίες ισχύει

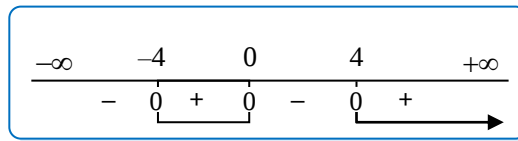
$$\begin{aligned} f(x) > g(x) &\Leftrightarrow x^3 - 4x + 1 > 12x + 1 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 16x > 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - 16) > 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 4)(x + 4) > 0. \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.



Δηλαδή, $x \in (-4, 0) \cup (4, +\infty)$.

11. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(x) + 1 = g(x) + e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

Λύση

i) Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα, οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το οποίο έχει τετμημένη 0.

ii) Οι ζητούμενες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ είναι εκείνες για τις οποίες ισχύει

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Δηλαδή, $x \in (-\infty, 0)$.

▣ Γενικές ασκήσεις

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0. \end{cases}$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- ii) Με τη βοήθεια της C_f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

Λύση

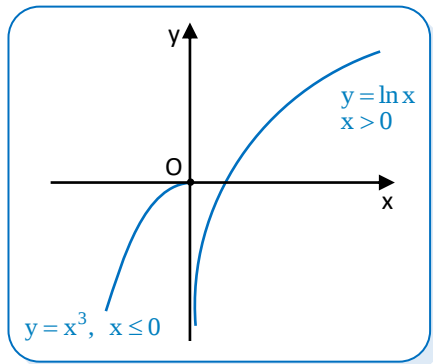
i) Έχουμε $D_f = \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της καμπύλης

$$y = x^3 \text{ με } x \leq 0$$

και τα σημεία της καμπύλης

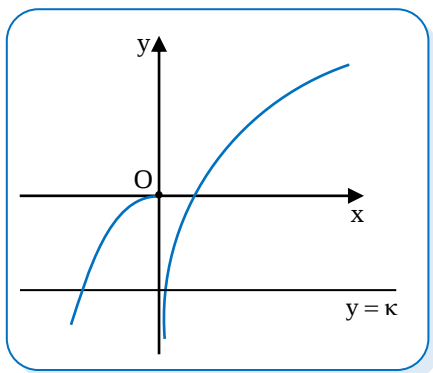
$$y = \ln x \text{ με } x > 0.$$



ii) Παρατηρούμε ότι κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τη C_f . Δηλαδή, κάθε πραγματικός αριθμός είναι τεταγμένη ενός τουλάχιστον σημείου της C_f . Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Σημείωση

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της γραφικής της παράστασης.



Σημείωση

Η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς τόσες ρίζες όσα είναι και τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = \kappa$.

Παρατηρούμε ότι η ευθεία $y = \kappa$ έχει:

- ακριβώς δύο κοινά σημεία με την C_f , αν $\kappa \in (-\infty, 0]$
- ακριβώς ένα κοινό σημείο με την C_f , αν $\kappa \in (0, +\infty)$.

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει:

- ακριβώς δύο ρίζες, αν $\kappa \in (-\infty, 0]$
- ακριβώς μία ρίζα, αν $\kappa \in (0, +\infty)$.

13. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f^3(x) + 2f(x) = 3 - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $y'y$
- ii) τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$
- iii) τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

i) Από τη δοθείσα σχέση, θέτοντας όπου x το 0, έχουμε

$$f^3(0) + 2f(0) = 3 \Leftrightarrow f^3(0) + 2f(0) - 3 = 0.$$

Θέτουμε $f(0) = u$ οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$u^3 + 2u - 3 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(u^2 + u + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow u - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad u^2 + u + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow u = 1,$$

1	0	2	-3	1
	1	1	3	
1	1	3	0	

αφού η εξίσωση $u^2 + u + 3 = 0$ έχει $\Delta = -11 < 0$ και συνεπώς είναι αδύνατη.

Άρα, $f(0) = 1$ και επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $A(0, 1)$.

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$f(x)[f^2(x) + 2] = 3 - x \Leftrightarrow f(x) = \frac{3 - x}{f^2(x) + 2},$$

αφού $f^2(x) + 2 > 0$.

Οπότε,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - x}{f^2(x) + 2} = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Άρα, η C_f έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ το $B(3, 0)$.

iii) Οι ζητούμενες τιμές του x είναι αυτές για τις οποίες ισχύει

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{3 - x}{f^2(x) + 2} < 0 \Leftrightarrow 3 - x < 0 \Leftrightarrow -x < -3 \Leftrightarrow x > 3.$$



Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν ισχύει $\alpha = f(\beta)$.
2. Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τότε το α ανήκει στο πεδίο ορισμού και το β στο σύνολο τιμών της f .
3. Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ έχει με τη γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης f το πολύ ένα κοινό σημείο.
4. Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης f το πολύ ένα κοινό σημείο.
5. Το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της γραφικής της παράστασης.
6. Το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της γραφικής της παράστασης.
7. Αν η οριζόντια ευθεία $y = y_0$ τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , τότε το y_0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
8. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών κ για τους οποίους η ευθεία $y = \kappa$ έχει κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο τιμών της f .
9. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορεί να διέρχεται από σημεία που έχουν την ίδια τεταγμένη.
10. Δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη.
11. Ένας αριθμός α ανήκει στο σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν η ευθεία $x = \alpha$ έχει κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f .
12. Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
13. Αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , το σημείο $M'(\alpha, -\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$.
14. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $y'y$.
15. Για κάθε συνάρτηση f οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $|f|$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.
16. Δεν υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε κάποιο σημείο της γραφικής παράστασης της $|f|$ να βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

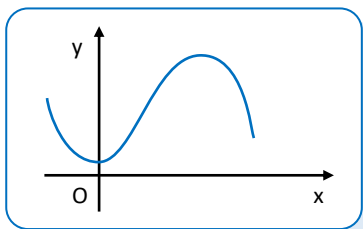


Ασκήσεις για λύση

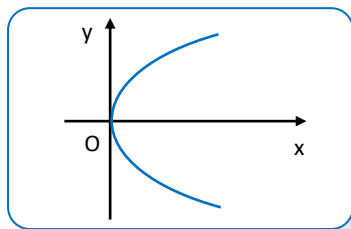
▣ Γραφικές παραστάσεις

- ✎ 1. Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i)



ii)



- ✎ 2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν:

Βλέπε
λυμένη
1

i) $f(x) = x - 1, x \in [0, 2]$

ii) $f(x) = x^2 + 1, x \in [-1, 1]$

iii) $f(x) = |x|, x \in [-1, 2]$

iv) $f(x) = |\eta\mu x|, x \in [0, 2\pi]$.

- ✎ 3. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

Βλέπε
λυμένη
2

i) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -x + 1, & x > 0 \end{cases}$

iv) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$.

4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν:

i) $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0. \end{cases}$

- ✎ 5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν:

Βλέπε
λυμένη
2

i) $f(x) = \frac{|x| + x}{2}$

ii) $f(x) = 2|x - 3| - x$.

6. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f όταν:

i) $f(x) = |x - 1|$

ii) $f(x) = \ln \frac{1}{x}$

iii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

iv) $f(x) = (\sqrt{x})^2$

v) $f(x) = 2\eta\mu x$

vi) $f(x) = e^x + 1$.

Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε το σύνολο τιμών της.

7. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν:

i) $f(x) = |x + 1|$

ii) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

iii) $f(x) = e^{x-1} + 1$

iv) $f(x) = \ln(x - 2)$.

8. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς x cm το οποίο έχει περίμετρο μικρότερη από 20 cm.

i) Να εκφράσετε το εμβαδό E του τετραγώνου ως συνάρτηση του x .

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που βρήκατε στο ερώτημα i).

9. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με μήκη πλευρών $AB = x$ cm και $B\Gamma = y$ cm το οποίο έχει περίμετρο $\Pi = 4$ cm.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $E(x)$ που εκφράζει το εμβαδό του ορθογώνιου ως συνάρτηση του x .

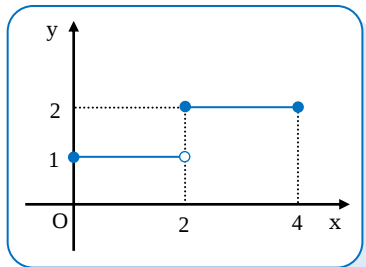
ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$.

■ Εύρεση συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση

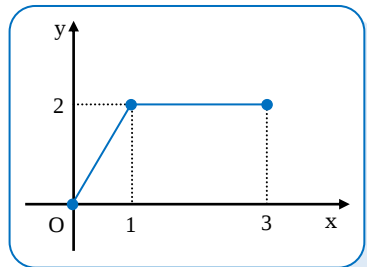
10. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f η οποία έχει την παρακάτω γραφική παράσταση:

Βλέπε
λυμένη
3

i)



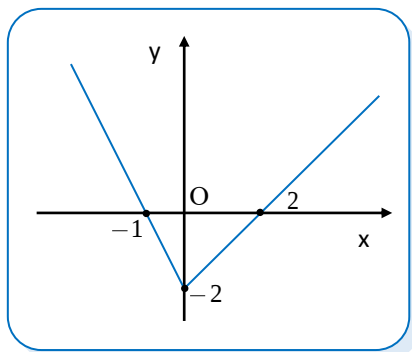
ii)



- 11.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που αποτελείται από δύο ημιευθείες.

Να βρείτε:

- i) τον τύπο της f
- ii) την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο $M(1+|a|, 1+a)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .



■ Πληροφορίες από τη C_f για την f

- 12.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν:

Βλέπε
λυμένη
4

- i) $f(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$
- ii) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 3, x \neq 1$.

Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε το σύνολο τιμών της.

- 13.** Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f όταν:

Βλέπε
λυμένη
4

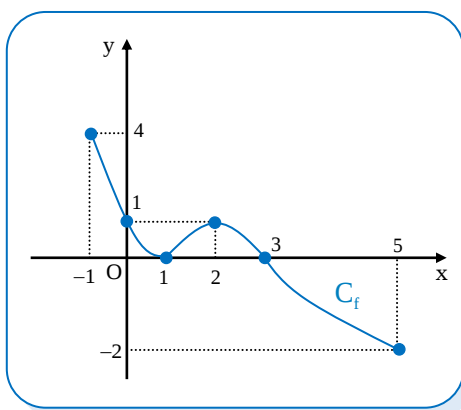
- i) $f(x) = (x+1)^2 + 3$
- ii) $f(x) = -(x-2)^3 + 1$
- iii) $f(x) = \sqrt{x+3} - 2$
- iv) $f(x) = \ln(x-1) - 3$.

Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε το σύνολο τιμών της.

- 14.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

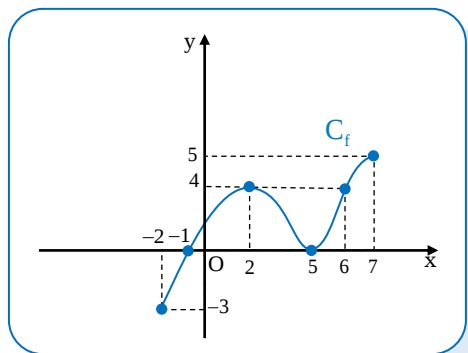
Βλέπε
λυμένη
5

- i) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(5)$.
- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- iii) Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $f(x) = 0$ β) $f^2(x) = f(x)$.
- iv) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2}$.



15. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $A = [-2, 7]$.

- i) Να βρείτε το σύνολο $f(A)$.
- ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $f(x) = 0$ β) $f(x) = 4$.
- iii) Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $f(x) > 0$ β) $f(x) \leq 4$.
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} \leq 2$.

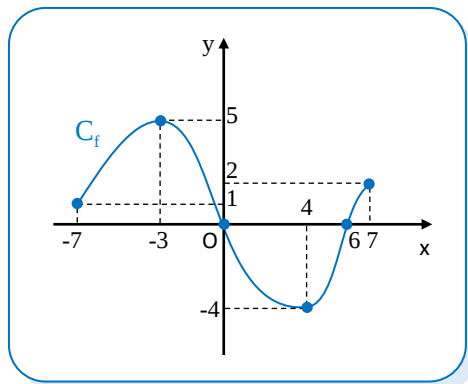


16. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [-7, 7] \rightarrow \mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
6

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g όταν:

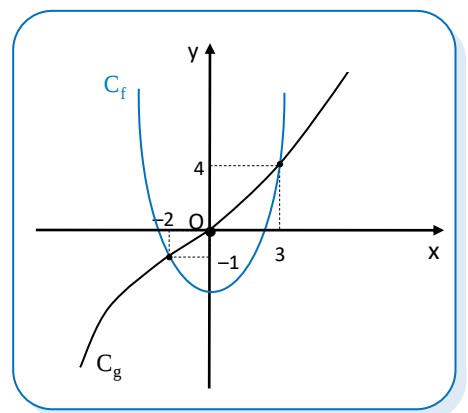
- i) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
- ii) $g(x) = \frac{1}{f(x) - 5}$
- iii) $g(x) = \sqrt{-f(x)}$
- iv) $g(x) = \ln(4 + f(x))$.



17. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
7

- i) Να λύσετε την εξίσωση
 $f(x) = g(x)$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση
 $f(x) > g(x)$.



18. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

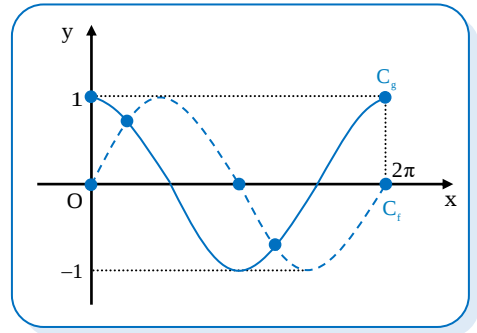
$$f(x) = \eta\mu x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

και

$$g(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

- i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \frac{1}{f(x) - g(x)}$.



■ Πληροφορίες από την f για τη C_f

- ✎ 19. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Στη συνέχεια, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν:

i) $f(x) = x^2 - 5x + 6, \quad x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}, \quad x \neq 1$

iii) $f(x) = |2x+1| - 5, \quad x \in \mathbb{R}$

iv) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - 5, \quad x \in \mathbb{R}.$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία:

i) $x = 3$

ii) $y = 2$

iii) $y = 5x - 3$

iv) $y = 3x - 1.$

- ✎ 21. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+\alpha}{x-3}$ διέρχεται από το σημείο

Βλέπε
λυμένη
8

$M(4, 2)$. Να βρείτε:

- i) την τιμή του α
ii) τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$
iii) τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

 **22.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln(a - e^x)$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε:

Βλέπε
λυμένη
9

- i) το πεδίο ορισμού της f
- ii) τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = x$
- iii) τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x$.

23. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x - \alpha)e^x + \beta$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο με τεταγμένη 2. Να βρείτε:

- i) τις τιμές των α και β
- ii) τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 2x$
- iii) τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2$.

 **24.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0. \end{cases}$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$
- ii) τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

 **25.** Να βρείτε –αν υπάρχουν– τα κοινά σημεία των C_f και C_g όταν:

Βλέπε
λυμένη
10

- i) $f(x) = 2x^2 + 5$ και $g(x) = x^2 + 6x$
- ii) $f(x) = x^3 - 3x$ και $g(x) = x^2 + x - 4$
- iii) $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} - 8$
- iv) $f(x) = 2 \ln x$ και $g(x) = \ln(2x + 3)$.

26. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , όταν:

Βλέπε
λυμένη
10

- i) $f(x) = x^2$ και $g(x) = 3x - 2$
- ii) $f(x) = 4$ και $g(x) = |x - 1|$
- iii) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ και $g(x) = x^2 - 4x + 1$
- iv) $f(x) = x^2 - e^x$ και $g(x) = x^2 e^x - 1$.

 **27.** Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

Βλέπε
λυμένη
11

$$f(x) + x = g(x) + x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων των C_f και C_g .
- ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g .

■ Γενικές ασκήσεις

 **28.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

Βλέπε
λυμένη
12

- i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- ii) Με τη βοήθεια της C_f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f .
- iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0. \end{cases}$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- ii) Με τη βοήθεια της C_f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f .
- iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

 **30.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

Βλέπε
λυμένη
13

$$f^3(x) - f^2(x) + f(x) = 1 - x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $y'y$
- ii) τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$
- iii) τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.



Κριτήριο αξιολόγησης 3

Θέμα Α

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x + |x - 2|}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- A1.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
A2. Με βάση τη C_f , να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (x - 1)^2 - 4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- B1.** Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
B2. Να σχεδιάσετε τη C_f .
B3. Με βάση τη C_f , να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
B4. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x - 5$.



Μάθημα 4

Προτεινόμενες διδακτικές ώρες: 2

Ισότητα συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{e^x} \text{ και } g(x) = e^x - 1$$

οι οποίες έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού που είναι το $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{e^x} = \frac{e^x(e^x - 1)}{e^x} = e^x - 1 = g(x).$$

Δηλαδή, οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και ίσες τιμές για όλα τα x του πεδίου ορισμού τους.

Λέμε ότι οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι ίσες. Γενικά έχουμε:

Ορισμός (ισότητας συναρτήσεων)

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν **το ίδιο πεδίο ορισμού A** και
- **για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$**

Βασική επισήμανση

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες, γράφουμε $f = g$.

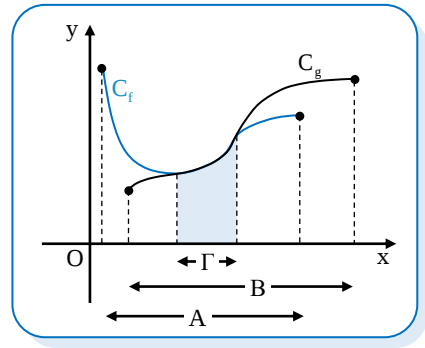
Παράδειγμα

Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = |x|$ είναι ίσες αφού έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Οπότε, $f = g$.

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B . Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ .



Παράδειγμα

Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{|x|}$ και $g(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι ίσες αφού $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = [0, +\infty)$. Όμως, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες στο διάστημα $[0, +\infty)$ αφού για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $|x| = x$ και συνεπώς $f(x) = \sqrt{x} = g(x)$.

Βασική επισήμανση

Δύο συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες όταν:

- $D_f \neq D_g$ ή
- $D_f = D_g = A$ και $f(x_0) \neq g(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in A$.

Παράδειγμα 1

Οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$ δεν είναι ίσες αφού $D_f = \mathbb{R}^*$ και $D_g = (0, +\infty)$ οπότε $D_f \neq D_g$.

Παράδειγμα 2

Οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = e^x$ δεν είναι ίσες αφού $f(0) = 0$ και $g(0) = 1$ οπότε $f(0) \neq g(0)$.



Πρόταση μελέτης

Όλες οι λυμένες ασκήσεις και από τις ασκήσεις για λύση οι:

1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11.



Λυμένες ασκήσεις

■ Απόδειξη – έλεγχος ισότητας συναρτήσεων

1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

i) $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$ και $g(x) = \ln|x|$

ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$ και $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$.

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$.
Δηλαδή, $D_f = \mathbb{R}^*$.

Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $|x| > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$.

Δηλαδή, $D_g = \mathbb{R}^*$. Επομένως, $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$.

Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} \ln|x|^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \ln|x| = \ln|x| = g(x).$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $f = g$.

ii) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από εκείνα τα x , ώστε

$$x \geq 0 \text{ και } x-1 \geq 0 \text{ και } \sqrt{x} + \sqrt{x-1} \neq 0, \text{ δηλαδή } x \geq 1. \text{ Άρα, } D_f = [1, +\infty).$$

Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα x , ώστε

$$x \geq 0 \text{ και } x-1 \geq 0, \text{ δηλαδή } x \geq 1. \text{ Άρα, } D_g = [1, +\infty) = D_f.$$

Επίσης, για κάθε $x \in [1, +\infty)$ ισχύει.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x-1})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{x - (x-1)} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{x - x + 1} = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = g(x). \end{aligned}$$

Άρα, $f = g$.

Σημείωση

Για να αποδείξουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι **ίσες** αρκεί να αποδείξουμε ότι:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x(x-4)} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-4}$$

δεν είναι ίσες. Στη συνέχεια, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$x(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty).$$

Άρα, $D_f = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $x \geq 0$ και $x-4 \geq 0$ δηλαδή $x \in [4, +\infty)$. Άρα, $D_g = [4, +\infty)$.

Οπότε, $D_f \neq D_g$ και συνεπώς $f \neq g$. Όμως,

για κάθε $x \in D_f \cap D_g = [4, +\infty)$ ισχύει $x > 0$ και $x-4 \geq 0$. Οπότε,

$$f(x) = \sqrt{x(x-4)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-4} = g(x).$$

Άρα, το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το

$$D_f \cap D_g = [4, +\infty).$$

Σημείωση

Για να αποδείξουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού A , B αντίστοιχα, δεν είναι ίσες αρκεί να αποδείξουμε ότι:

- $A \neq B$
- ή
- $A = B$ και $f(x_0) \neq g(x_0)$ για κάποιο x_0 .

3. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $f = g$. Αν $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

i) $f(x) = |x|^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ii) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $|x| \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) = |x|^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{|x|^2} = \sqrt[3]{x^2} = g(x).$$

Σημείωση

Αν μ άρτιος με $\mu \neq 0$ και ν θετικός ακέραιος με $\nu \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\sqrt[\nu]{x^\mu} = |x|^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Άρα, $f = g$.

- ii) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, +\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, $D_f = [0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$ και συνεπώς $D_f \neq D_g$. Άρα, $f \neq g$.

Παρατηρούμε ότι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το διάστημα $[0, +\infty)$.

Σημείωση

Αν $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ με $\nu > 1$, τότε για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\sqrt[\nu]{x^\mu} = x^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

■ Εύρεση παραμέτρων

4. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-\beta} + \frac{\gamma}{x-2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{4x+1}{x^2-x-2}$$

είναι ίσες.

Λύση

- Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από εκείνα τα x ώστε $x - \beta \neq 0$ και $x - 2 \neq 0$ δηλαδή $x \neq \beta$ και $x \neq 2$. Οπότε, $D_f = \mathbb{R} - \{\beta, 2\}$.
- Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα x ώστε $x^2 - x - 2 \neq 0$ δηλαδή $x \neq -1$ και $x \neq 2$. Οπότε, $D_g = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

Αναγκαία προϋπόθεση για να ισχύει $f = g$ είναι $D_f = D_g$ και συνεπώς $\beta = -1$.

Επομένως, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες όταν για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ ισχύει

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\gamma}{x-2} = \frac{4x+1}{x^2-x-2} \Leftrightarrow \frac{\alpha(x-2) + \gamma(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{4x+1}{x^2-x-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha x - 2\alpha + \gamma x + \gamma}{x^2 - x - 2} = \frac{4x+1}{x^2 - x - 2} \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)x - 2\alpha + \gamma = 4x + 1 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \gamma - 4)x = 2\alpha - \gamma + 1. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για άπειρες τιμές του x μόνο όταν

$$\begin{cases} \alpha + \gamma - 4 = 0 \\ 2\alpha - \gamma + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 4 \\ 2\alpha - \gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 4 \\ 3\alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 3 \\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Άρα, $f = g$ αν και μόνο αν $\alpha = 1$, $\beta = -1$ και $\gamma = 3$.



Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει ως λύση κάθε αριθμό x ενός συνόλου A , τότε οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο A .
2. Δύο συναρτήσεις που έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού δεν είναι ίσες.
3. Αν δύο συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) \neq g(x_0)$ τότε οι δύο συναρτήσεις δεν είναι ίσες.
4. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι ίσες αλλά έχουν διαφορετική γραφική παράσταση.
5. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι ίσες, αλλά είναι ίσες σε κάποιο σύνολο το οποίο είναι υποσύνολο των πεδίων ορισμού τους.
6. Αν για δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \Gamma,$$

τότε οι f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ .

7. Για κάθε $\mu \in \mathbb{N}^*$ και $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{\mu}{\nu}}$ και $g(x) = \sqrt[\nu]{x^\mu}$ είναι ίσες.
8. Οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$ είναι ίσες.
9. Αν δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και το ίδιο σύνολο τιμών, είναι κατ' ανάγκη ίσες.
10. Αν δύο συναρτήσεις δεν έχουν το ίδιο σύνολο τιμών, δεν είναι ίσες.
11. Αν για δύο συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = \{c\},$$

τότε οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.



Ασκήσεις για λύση

▣ Απόδειξη – έλεγχος ισότητας συναρτήσεων

1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

Βλέπε
λυμένη
1

i) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$ και $g(x) = |x| - 1$

ii) $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - 1}$ και $g(x) = \frac{|x|}{|x| - 1}$

iii) $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$ και $g(x) = \sqrt{x} - 1$

iv) $f(x) = \sin^4 x - \eta\mu^4 x$ και $g(x) = 2\sin^2 x - 1$.

2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

Βλέπε
λυμένη
1

i) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $g(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ii) $f(x) = \frac{4^x - 1}{2^x + 1}$ και $g(x) = 2^x - 1$

iii) $f(x) = \ln \sqrt{x - 1}$ και $g(x) = \frac{\ln(x - 1)}{2}$

iv) $f(x) = \ln \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ και $g(x) = 2x - \ln(e^x + 1)$.

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

i) $f(x) = 2^x$ και $g(x) = e^{x \ln 2}$

ii) $f(x) = (x^2 + 1)^x$ και $g(x) = e^{x \ln(x^2 + 1)}$

iii) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ και $g(x) = e^{-\ln|x|}$

iv) $f(x) = x^x, x > 0$ και $g(x) = e^{x \ln x}$.



4. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες. Στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο Γ των πραγματικών αριθμών στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

Βλέπε
λυμένη
2

i) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ και $g(x) = x$

ii) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ και $g(x) = x - 2$

iii) $f(x) = \ln[(x-1)(x-2)]$ και $g(x) = \ln(x-1) + \ln(x-2)$

iv) $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$ και $g(x) = \ln x - \ln(x+1)$.



5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες. Στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο Γ των πραγματικών αριθμών στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

Βλέπε
λυμένη
2

i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1-x}}{2x - 1}$.



6. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $f = g$. Στις περιπτώσεις που ισχύει $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

Βλέπε
λυμένη
3

i) $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = |x|$ ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ και $g(x) = x^{\frac{4}{3}}$

iii) $f(x) = |x|^{\frac{4}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^4}$ iv) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ και $g(x) = \sqrt{x^3}$.

7. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $f = g$. Στις περιπτώσεις που ισχύει $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

i) $f(x) = \ln e^x$ και $g(x) = x$

ii) $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$.

8. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $f = g$. Στις περιπτώσεις που ισχύει $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

i) $f(x) = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}$ και $g(x) = x - \ln(x^2 + 1)$

ii) $f(x) = e^{\ln x}$ και $g(x) = \ln e^x$.

9. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f^2(x) \leq g(x)[2f(x) - g(x)] \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f = g$.

■ Εύρεση παραμέτρων

-  10. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες οι συναρτήσεις

$$f(x) = \alpha x^2(x-1) + \beta x(x-2) + \gamma, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι ίσες.

-  11. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες είναι ίσες οι συναρτήσεις

Βλέπε
λυμένη
4

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+\gamma} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{5x-7}{x^2-3x+2}.$$

12. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

i) $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - \alpha}$ και $g(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 3}{x + 2}$

ii) $f(x) = \frac{(\alpha x)^2 + \beta x}{x - \alpha^2}$ και $g(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{x - \alpha}$.



Κριτήριο αξιολόγησης 4

Θέμα Α

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις f, g είναι ίσες:

A1. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2}$ και $g(x) = |x| \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

A2. $f(x) = \sqrt{x} - 2$ και $g(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$

A3. $f(x) = \ln \frac{x}{e^x}$ και $g(x) = \ln x - x$.

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln \frac{\alpha^x}{\alpha^x - 1}$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός με $0 < \alpha \neq 1$.

- B1.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .
- B2.** Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει $f = g$.
- B3.** Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- B4.** Αν $\alpha = e$, να βρείτε τα κοινά σημεία της C_g με την ευθεία $y = x$.



Μάθημα 5

Προτεινόμενες διδακτικές ώρες: 1

Πράξεις με συναρτήσεις

Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{4-x}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

και οι

$$h_1(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x}, \quad h_2(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{x}$$

$$h_3(x) = \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x}, \quad h_4(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}}.$$

Παρατηρούμε ότι:

- α) • Το πεδίο ορισμού των h_1 , h_2 και h_3 είναι το σύνολο $[0, 4]$ που είναι η τομή των πεδίων ορισμού $A = (-\infty, 4]$ και $B = [0, +\infty)$ των f , g αντίστοιχα. Δηλαδή, το σύνολο $[0, 4]$ αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- Το πεδίο ορισμού της h_4 είναι το σύνολο $(0, 4]$ που είναι η τομή των A , B αν εξαιρέσουμε τα x για τα οποία ισχύει $g(x) = 0$.

β) $h_1(x) = f(x) + g(x), \quad h_2(x) = f(x) - g(x)$

$$h_3(x) = f(x) \cdot g(x), \quad h_4(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Τις συναρτήσεις h_1 , h_2 , h_3 και h_4 τις λέμε άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο αντίστοιχα των συναρτήσεων f , g . Γενικά:

Ορίζουμε ως **άθροισμα** $f + g$, **διαφορά** $f - g$, **γινόμενο** fg και **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ των

συναρτήσεων f , g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, δηλαδή το σύνολο $\{x | x \in A \text{ και } x \in B\}$.
- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$ εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x | x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

Παράδειγμα

Αν $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ και $g(x) = \ln(5-x)$, $x \in (-\infty, 5)$, τότε το πεδίο ορισμού της $f+g$ είναι το διάστημα $(0, 5)$ που είναι η τομή των διαστημάτων $(0, +\infty)$ και $(-\infty, 5)$ και ισχύει

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \ln x + \ln(5-x), \quad x \in [0, 5].$$

Βασική επισήμανση

Οι ορισμοί για το άθροισμα και το γινόμενο δύο συναρτήσεων επεκτείνονται και στην περίπτωση περισσότερων συναρτήσεων.

Παράδειγμα

Αν $f_1(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ και $f_3(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ τότε

$$(f_1 + f_2 + f_3)(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

και

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} = x\sqrt{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Επίσης,

Ορίζουμε ως **νιοστή δύναμη της f** και συμβολίζουμε με f^v , $v \in \mathbb{N}^*$ τη συνάρτηση με τύπο

$$(f^v)(x) = f^v(x) = (f(x))^v.$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^v είναι το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f^2 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο $(f^2)(x) = f^2(x) = \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Πρόταση μελέτης

Όλες οι λυμένες ασκήσεις και από τις ασκήσεις για λύση οι:

1, 2, 5, 6, 7, 9.



Λυμένες ασκήσεις

■ Εύρεση πράξεων συναρτήσεων

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x - \sqrt{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις

$$f+g, \quad f-g, \quad fg \quad \text{και} \quad \frac{f}{g}.$$

Λύση

Το πεδίο ορισμού A της f αποτελείται από εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $x \geq 0$. Δηλαδή,

$$A = [0, +\infty).$$

Το πεδίο ορισμού B της g αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

Δηλαδή,

$$B = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ και fg έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο

$$\Gamma = A \cap B = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

και αντίστοιχους τύπους:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x - \sqrt{x} + \frac{x}{x-1}$ για κάθε $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$,
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x - \sqrt{x} - \frac{x}{x-1}$ για κάθε $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$

Σημείωση

Το **άθροισμα** $f+g$, η **διαφορά** $f-g$ και το **γινόμενο** fg έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f \cap D_g$ και αντίστοιχους τύπους:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 2 \\ \frac{1}{x} - 1, & x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) $f + g$

ii) $f g$.

Λύση

- i)**
- Για κάθε $x \leq 2$ έχουμε
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2$.
 - Για κάθε $x > 2$ έχουμε
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + \frac{1}{x} - 1$.

Άρα,

$$(f + g)(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 2 \\ x + \frac{1}{x} - 1, & x > 2. \end{cases}$$

- ii)**
- Για κάθε $x \leq 2$ έχουμε
 $(f g)(x) = f(x)g(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$.
 - Για κάθε $x > 2$ έχουμε
 $(f g)(x) = f(x)g(x) = x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = 1 - x$.

Άρα,

$$(f g)(x) = \begin{cases} x^4 - 1, & x \leq 2 \\ 1 - x, & x > 2. \end{cases}$$

Σχόλιο

Ο τύπος κάθε συνάρτησης έχει άλλη μορφή για $x \leq 2$ και άλλη για $x > 2$. Διακρίνουμε λοιπόν δύο περιπτώσεις.

■ Εύρεση τύπου συνάρτησης από πράξεις συναρτήσεων

- 4.** Έστω δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$f^2 = g, \quad f(A) = (-\infty, 0]$$

και

$$g(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i)** το πεδίο ορισμού της f
ii) τον τύπο της f .

Λύση

- i) Επειδή $f^2 = g$, οι συναρτήσεις f^2 και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
Οπότε, οι συναρτήσεις f και g έχουν επίσης το ίδιο πεδίο ορισμού. Άρα,
 $A = \mathbb{R}$.

- ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f^2(x) = g(x) &\Leftrightarrow f^2(x) = x^2 - 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow f^2(x) = (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{(x-1)^2} \\ &\Leftrightarrow |f(x)| = |x-1| \quad (1) \end{aligned}$$

Όμως,

$$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$$

και συνεπώς

$$f(x) \leq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$|f(x)| = -f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η σχέση (1) γράφεται

$$-f(x) = |x-1| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και τελικά

$$f(x) = -|x-1| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$



Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f + g$ είναι η ένωση $A \cup B$.
2. Για όλες τις συναρτήσεις f, g ορίζεται η συνάρτηση $f - g$.
3. Το πεδίο ορισμού του γινομένου $f \cdot g$ δύο συναρτήσεων f, g είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A, B των f, g .
4. Για όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f \cdot g$ έχει πεδίο ορισμού το A .
5. Για όλες τις συναρτήσεις f, g οι συναρτήσεις $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
6. Για όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
7. Για όλες τις συναρτήσεις f, g οι συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
8. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ δεν έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε η C_g έχει ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.
9. Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$, τότε ορίζεται κατ' ανάγκη και η συνάρτηση $\frac{g}{f}$.
10. Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση fg έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τότε ισχύει κατ' ανάγκη $A = B = \mathbb{R}$.



Ασκήσεις για λύση

■ Εύρεση πράξεων συναρτήσεων

- 1.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{4}{x}$ και $g(x) = x - \frac{4}{x}$.

Βλέπε
λυμένη
1

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

- i) $f + g$ ii) $f g$ iii) $\frac{f}{g}$ iv) $\frac{g}{f}$.

- 2.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$.

Βλέπε
λυμένη
1

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

- i) $f + g$ ii) $f - g$ iii) $f g$ iv) $\frac{f}{g}$.

- 3.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x - 1$ και $g(x) = \ln x$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

- i) $f + g$ ii) $f g$ iii) $\frac{f}{g}$ iv) $\frac{g}{f}$.

- 4.** Δίνονται οι συναρτήσεις

Βλέπε
λυμένη
3

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

- i) fg ii) $\frac{f}{g}$.

- 5.** Δίνονται οι συναρτήσεις

Βλέπε
λυμένη
3

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \eta\mu^2 x, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sin^2 x, & x < 0 \end{cases}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

- i) $f + g$ ii) $f g$.

**Κριτήριο αξιολόγησης 5****Θέμα Α**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{27 - x^3} \text{ και } g(x) = x^2 - 6x + 8.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

A1. $f + g$

A2. $\frac{f}{g}.$

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases} \text{ και } g(x) = x^2 - 3x.$$

Να βρείτε:

B1. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$

B2. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$

B3. τη συνάρτηση $\frac{f}{g}.$



Μάθημα 6

Προτεινόμενες διδακτικές ώρες: 3

Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{\ln x}$.

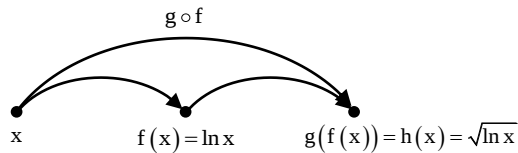
Παρατηρούμε ότι η $h(x)$ προκύπτει από τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x}$ αν θέσουμε σε αυτή όπου x το $\ln x$.

Αυτό σημαίνει ότι αν $f(x) = \ln x$, τότε

$$h(x) = \sqrt{\ln x} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)).$$

Βέβαια, τα παραπάνω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι $x > 0$, ώστε να ορίζεται η f και $f(x) \geq 0$, ώστε να ορίζεται η g .

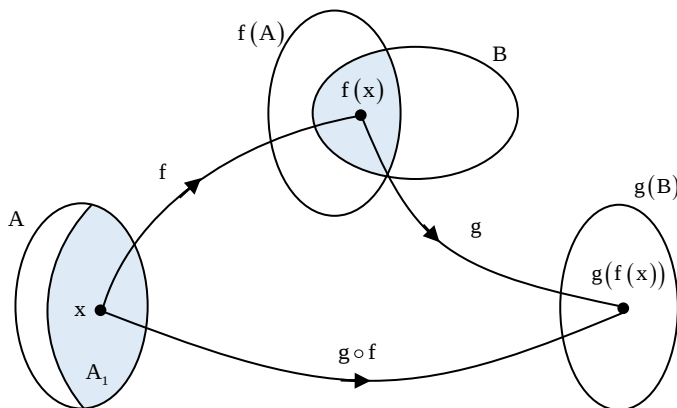
Η συνάρτηση h λέγεται σύνθεση της f με τη g και συμβολίζεται με $g \circ f$.



Ορισμός (σύνθεσης συναρτήσεων)

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** και τη συμβολίζουμε με **$g \circ f$** , τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



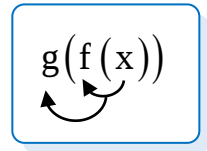
Βασικές επισημάνσεις

- Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή, είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Οπότε, για να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$ λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x \in A \text{ και} \\ f(x) \in B \end{cases}$$



- Η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$ δηλαδή, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι για να ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ πρέπει το σύνολο τιμών της f και το πεδίο ορισμού της g να έχουν κοινά στοιχεία. Για παράδειγμα, αν $f(A) = (-\infty, 0)$ και $B = [0, +\infty)$ τότε, δεν ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ αφού $f(A) \cap B = \emptyset$.

Προσοχή! Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

Παράδειγμα

Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \sqrt{x}$ έχουν πεδία ορισμού $A = \mathbb{R}^*$ και $B = [0, +\infty)$ αντίστοιχα. Οπότε, το πεδίο ορισμού A_1 της $g \circ f$ αποτελείται από εκείνα τα x

$$\begin{cases} x \in A \\ f(x) \in B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ \frac{1}{x} \in [0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Άρα, $A_1 = (0, +\infty)$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

- Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν επίσης πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες. Δηλαδή, γενικά

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Παράδειγμα 1

Αν $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ τότε:

- Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από εκείνα τα x , ώστε

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

- Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από εκείνα τα x , ώστε

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Επομένως $D_{f \circ g} = [0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $D_{g \circ f} \neq D_{f \circ g}$ και συνεπώς $g \circ f \neq f \circ g$.

Παράδειγμα 2

Αν $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $D_{g \circ f} = D_{f \circ g} = \mathbb{R}$. Επίσης,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 2x^3 + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $(g \circ f)(1) \neq (f \circ g)(1)$ και συνεπώς $g \circ f \neq f \circ g$.

- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$.

Παράδειγμα

Αν $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = x^2$ και $h(x) = \sqrt{x}$, τότε το πεδίο A της συνάρτησης $h \circ g \circ f$, αποτελείται από εκείνα τα x ώστε $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$ και $g(x) \in D_h$. Δηλαδή,

$x \in \mathbb{R}$, $\eta\mu x \in \mathbb{R}$ και $x^2 \in [0, +\infty)$ ή ισοδύναμα $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, $A = \mathbb{R}$ και

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(\eta\mu x)) = h(\eta\mu^2 x) = \sqrt{\eta\mu^2 x} = |\eta\mu x|, x \in \mathbb{R}.$$



Πρόταση μελέτης

Όλες οι λυμένες ασκήσεις και από τις ασκήσεις για λύση οι:

1, 4, 6, 8, 9, 10, 14, 15, 19, 21, 24, 26, 27.



Λυμένες ασκήσεις

▣ Πεδίο ορισμού σύνθεσης συναρτήσεων

1. Έστω συνάρτηση $f : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g όταν:

i) $g(x) = f(x+2)$

ii) $g(x) = f(1-x)$

iii) $g(x) = f(x^2)$

ii) $g(x) = f(1-|x|)$.

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $x+2 \in D_f = (-\infty, 1)$. Δηλαδή, $x+2 < 1 \Leftrightarrow x < -1$.

Άρα, $D_g = (-\infty, -1)$.

ii) Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $1-x \in D_f = (-\infty, 1)$. Δηλαδή, $1-x < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Άρα, $D_g = (0, +\infty)$.

iii) Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $x^2 \in D_f = (-\infty, 1)$. Δηλαδή, $x^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Άρα, $D_g = (-1, 1)$.

iv) Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $1-|x| \in D_f = (-\infty, 1)$. Δηλαδή, $1-|x| < 1 \Leftrightarrow -|x| < 0 \Leftrightarrow |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Άρα, $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$.

■ Εύρεση σύνθεσης συναρτήσεων

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \sqrt{1-x}$ και $f(x) = \ln x$.
Να βρείτε τις συναρτήσεις:

- i) $g \circ f$ ii) $f \circ g$ iii) $f \circ f$.

Λύση

i) Τα πεδία ορισμού των g και f είναι αντίστοιχα

$$D_g = (-\infty, 1] \text{ και } D_f = (0, +\infty).$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$ αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύουν

$$x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g.$$

Δηλαδή,

$$x > 0 \text{ και } \ln x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e.$$

Άρα, $0 < x \leq e$ και συνεπώς

$$D_{g \circ f} = (0, e].$$

Ο τύπος της $g \circ f$ είναι

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

για κάθε $x \in (0, e]$.

ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$ αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύουν

$$x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f.$$

Δηλαδή,

$$x \in (-\infty, 1] \text{ και } \sqrt{1-x} \in (0, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \text{ και } \sqrt{1-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \text{ και } 1-x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \text{ και } x < 1$$

$$\Leftrightarrow x < 1.$$

Άρα, $D_{f \circ g} = (-\infty, 1)$.

Ο τύπος της $f \circ g$ είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{1-x}) = \ln \sqrt{1-x} \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 1).$$

Σχόλια

- Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία το $g(f(x))$ έχει νόημα. Δηλαδή, από όλα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$.

- Ο τύπος της $g \circ f$ είναι $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Δηλαδή, προκύπτει αν στον τύπο της g θέσουμε όπου x το $f(x)$.

- iii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f$ αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύουν

$$x \in D_f \quad \text{και} \quad f(x) \in D_f.$$

Δηλαδή,

$$x \in (0, +\infty) \quad \text{και} \quad \ln x \in (0, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \quad \text{και} \quad \ln x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \quad \text{και} \quad \ln x > \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \quad \text{και} \quad x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 1.$$

Άρα, $D_{f \circ f} = (1, +\infty)$.

Ο τύπος της $f \circ f$ είναι

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\ln x) = \ln(\ln x) \quad \text{για κάθε } x \in (1, +\infty).$$

3.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(-x).$$

Να αποδείξετε ότι δεν ορίζεται η σύνθεση της f με τη g .

Λύση

Έχουμε $D_f = [0, +\infty)$ και $D_g = (-\infty, 0)$.

Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι ορίζεται η σύνθεση της f με τη g δηλαδή, η συνάρτηση $g \circ f$. Οπότε, το σύνολο

$$A_1 = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

δεν είναι το κενό σύνολο $\emptyset$.

Αυτό σημαίνει πως το σύστημα

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ \sqrt{x} \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

έχει λύση, πράγμα άτοπο αφού $\sqrt{x} \geq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και συνεπώς το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο.

Άρα, η υπόθεσή μας, ότι δηλαδή ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ ήταν λανθασμένη και συνεπώς η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται.

Σημείωση

Η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται αν και μόνο αν το σύστημα $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$ έχει λύση. Οπότε, η συνάρτηση $g \circ f$ δεν ορίζεται αν και μόνο αν το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο.

■ Έκφραση συνάρτησης ως σύνθεση συναρτήσεων

4. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, όταν:

i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = e^{\eta\mu x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

i) Η συνάρτηση f είναι σύνθεση της συνάρτησης $g(x) = x^2 + 1$ με τη συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x}$ αφού, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 + 1) \\ = \sqrt{x^2 + 1} = f(x).$$

ii) Η συνάρτηση f είναι σύνθεση της συνάρτησης $g(x) = \eta\mu x$ με τη συνάρτηση $h(x) = e^x$ αφού, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\eta\mu x) \\ = e^{\eta\mu x} = f(x).$$

Παρατήρηση

Η παράσταση $\sqrt{x^2 + 1}$ προκύπτει από την παράσταση $\sqrt{x}$ αν θέσουμε όπου x το $x^2 + 1$.

Παρατήρηση

Η παράσταση $e^{\eta\mu x}$ προκύπτει από την παράσταση e^x αν θέσουμε όπου x το $\eta\mu x$.

■ Εύρεση της g από τη $g \circ f$

5. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$f(x) = 4 - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$(g \circ f)(x) = x^2 - x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(g \circ f)(x) = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = x^2 - x + 1.$$

Και επειδή $f(x) = 4 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι

$$g(4-x) = x^2 - x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε $4-x = y \Leftrightarrow x = 4-y$, $y \in f(\mathbb{R})$. Οπότε,

$$\begin{aligned} g(y) &= (4-y)^2 - (4-y) + 1 \\ &= 16 - 8y + y^2 - 4 + y + 1 \\ &= y^2 - 7y + 13 \text{ για κάθε } y \in f(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Όμως, το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = 4-x, x \in \mathbb{R} \text{ είναι όλο το } \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$g(x) = x^2 - 7x + 13 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση

Εκτελώντας την αντικατάσταση

$$y = f(x)$$

πρέπει να έχουμε υπόψιν ότι η νέα μεταβλητή y παίρνει τιμές από το σύνολο τιμών της f .

Δηλαδή,

$$y \in f(\mathbb{R}).$$

6. Έστω συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$g(e^x) = x - e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της g .

Λύση

Θέτουμε

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y, y \in (0, +\infty).$$

Οπότε, η δοθείσα σχέση γράφεται

$$g(y) = \ln y - y \text{ για κάθε } y \in (0, +\infty),$$

αφού το σύνολο τιμών της συνάρτησης e^x είναι το διάστημα $(0, +\infty)$. Άρα,

$$g(x) = \ln x - x \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Σχόλιο

Γνωρίζουμε την $g(e^x)$ και θέλουμε να βρούμε την $g(x)$. Θέτουμε $y = e^x$ και λύνουμε ως προς x . Προφανώς, το y ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x$ που είναι το $(0, +\infty)$.

■ Εύρεση της g από τη $f \circ g$

7. Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f(x) = x^3 + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της g .

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 2 \Leftrightarrow f(g(x)) = x^2 + 2 \quad (1)$$

Όμως, $f(x) = x^3 + 1$ και συνεπώς

$$f(g(x)) = (g(x))^3 + 1.$$

Οπότε, η σχέση (1) γράφεται

$$(g(x))^3 + 1 = x^2 + 2 \Leftrightarrow (g(x))^3 = x^2 + 1.$$

Και επειδή $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

■ Εύρεση παραμέτρων

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \alpha$ και $g(x) = 2\alpha x + \beta$ για τις οποίες ισχύει $f \circ f = g - f$.

Να βρείτε τις τιμές των α και β .

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= (g - f)(x) \\ \Leftrightarrow f(f(x)) &= g(x) - f(x) \\ \Leftrightarrow f(x + \alpha) &= 2\alpha x + \beta - (x + \alpha) \\ \Leftrightarrow (x + \alpha) + \alpha &= 2\alpha x + \beta - x - \alpha \\ \Leftrightarrow x + 2\alpha &= (2\alpha - 1)x + \beta - \alpha \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει όταν

$$1 = 2\alpha - 1 \text{ και } 2\alpha = \beta - \alpha$$

ή ισοδύναμα $\alpha = 1$ και $\beta = 3$.

Σημείωση

Αν δύο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε είναι ίσα. Έτσι, η ισότητα $\alpha x + \beta = \gamma x + \delta$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ μόνο όταν και $\beta = \delta$.

■ Γενικές ασκήσεις

9. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) = 4x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(4x + 3) = 4f(x) + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Θέτουμε στη δοθείσα σχέση όπου x το $f(x)$,
 οπότε έχουμε

$$f(f(f(x))) = 4f(x) + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Επειδή $f(f(x)) = 4x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντικα-
 θιστώντας στο α' μέλος της σχέσης (1) έχουμε

$$f(4x + 3) = 4f(x) + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Σχόλιο

Οι πληροφορίες που έχουμε σε
 ένα πρόβλημα, δεν είναι απα-
 ραίτητα μιας χρήσης. Έτσι,
 στη συγκεκριμένη περίπτωση,
 αξιοποιούμε τη δοθείσα ισό-
 τητα δύο φορές.

10. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Λύση

Θέτουμε $u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$.

Οπότε, $x \neq 0$, $u \neq 0$ και η δοθείσα σχέση γράφεται

$$2f\left(\frac{1}{u}\right) + f(u) = \frac{3}{u} \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{ή} \quad 2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{3}{x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{cases} 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x & \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{3}{x} & \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 6x & \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{3}{x} & \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες, αφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκουμε

$$3f(x) = 6x - \frac{3}{x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ και τελικά } f(x) = 2x - \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Σχόλιο

Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε
 την αντικατάσταση $u = \frac{1}{x}$ θέτο-
 ντας απλά στη δοθείσα σχέση
 όπου x το $\frac{1}{x}$.

Όμως, επιλέξαμε αυτόν τον τρόπο
 γιατί είναι πιο μεθοδικός και πιο
 ξεκάθαρος ως προς την εύρεση
 του συνόλου στο οποίο ορίζεται η
 νέα σχέση που προκύπτει από τη
 δοθείσα.



Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Ονομάζουμε σύνθεση μιας συνάρτησης f με μία συνάρτηση g και τη συμβολίζουμε με $f \circ g$ τη συνάρτηση με τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
2. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχα. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$ είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}$.
3. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται μόνο αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.
4. Αν ορίζεται η σύνθεση μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με μία συνάρτηση $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε $x_0 \in A$ και $f(x_0) \in B$.
5. Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $x_0 \in B$ και $g(x_0) \notin A$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ δεν ορίζεται στο σημείο x_0 .
6. Για όλες τις συναρτήσεις f, g με $D_f = \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$.
7. Για όλες τις συναρτήσεις f, g ορίζεται η σύνθεση της f με τη g .
8. Κάθε τιμή της συνάρτησης $g \circ f$ ανήκει στο σύνολο τιμών της g .
9. Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$.
10. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$ τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.



Ασκήσεις για λύση

▣ Πεδίο ορισμού σύνθεσης συναρτήσεων

- ✎ 1. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
1

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g όταν:

i) $g(x) = f(-x)$

ii) $g(x) = f(4 - x^2)$

iii) $g(x) = f(1 - \sqrt{x})$

iv) $g(x) = f(\ln x)$.

2. Έστω συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g όταν:

i) $g(x) = f\left(\frac{4}{x}\right)$

ii) $g(x) = f\left(\sqrt[3]{x}\right)$

iii) $g(x) = f(2^x)$

iv) $g(x) = f(\eta\mu^2 x + 1)$.

3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$. Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = f(x-1) + f(\ln x) + 1.$$

■ Εύρεση σύνθεσης συναρτήσεων

 4. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ όταν:

Βλέπε
λυμένη
2

i) $f(x) = 2x + 1$ και $g(x) = 3x - 2$

ii) $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$

iii) $f(x) = e^x + 1$ και $g(x) = \ln x + x$

iv) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$ και $g(x) = \ln \frac{x}{x-1}$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ και } g(x) = e^x.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) $f \circ g$

ii) $g \circ f$

iii) $f \circ f$

iv) $g \circ g$.

 6. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ και } g(x) = \ln x.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) $f \circ g$

ii) $g \circ f$

iii) $f \circ f$

iv) $g \circ g$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad g(x) = \eta\mu x \quad \text{και} \quad h(x) = |\sin x|.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $f \circ g = h$.
- ii) Να εξετάσετε αν ισχύει $f \circ h = g$.

 8. Να αποδείξετε ότι δεν ορίζεται η σύνθεση της f με την g όταν:

Βλέπε
λυμένη
3

- i) $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$
- ii) $f(x) = -\sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

■ Έκφραση συνάρτησης ως σύνθεση συναρτήσεων **9.** Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, όταν:

Βλέπε
λυμένη
4

- i) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, x \in \mathbb{R}$
- ii) $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$
- iii) $f(x) = e^{2x-1}, x \in \mathbb{R}$
- iv) $f(x) = \ln(x^2 + 1), x \in \mathbb{R}$
- v) $f(x) = |\eta\mu x|, x \in \mathbb{R}$
- vi) $f(x) = \sqrt{\sin(\ln x) + 1}, x \in (0, +\infty)$.

■ Εύρεση της g από τη $g \circ f$ **10.** Έστω f, g δυο συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν

Βλέπε
λυμένη
5

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad (g \circ f)(x) = 4x^2 - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε τον τύπο της g .
- ii) Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ g$.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$f(x) = 2x - 7 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad (g \circ f)(x) = -6x + 25 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

- i) g
- ii) $f \circ g$.

- 12.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: [4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$f(x) = 3x - 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } (g \circ f)(x) = \sqrt{3x - 9} \text{ για κάθε } x \in [3, +\infty).$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) g

ii) $f \circ g$.

- 13.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$g(x) = \ln x \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } (f \circ g)(x) = \frac{x}{x+1} \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

-  **14.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\ln x) = x - \ln x \text{ για κάθε } x > 0.$$

Βλέπε
λυμένη
6

□ Εύρεση της g από τη $f \circ g$

-  **15.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$f(x) = 5x - 7 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } (f \circ g)(x) = 15x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) g

ii) $g \circ f$.

- 16.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$f(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } (f \circ g)(x) = x^2 - x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) g

ii) $g \circ f$.

- 17.** Να βρείτε τον τύπο της g όταν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

i) $f(x) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $(f \circ g)(x) = \eta \mu x - x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = e^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
7

18. Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$(g \circ f)(x) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = |x| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

▣ Εύρεση παραμέτρων

19. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g τέτοιες, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

Βλέπε
λυμένη
8

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = ax + \beta \text{ και } (g \circ f)(x) = 2x + 3.$$

Να βρείτε τις τιμές των a και β .

20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax - 2$ και $g(x) = 2x - a$.

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

21. Έστω πολωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1^{ου} βαθμού και τέτοια, ώστε

$$(f \circ f)(x) = x - 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο τη f .

▣ Γενικές ασκήσεις

22. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) + f(4 - x) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μία, τουλάχιστον λύση.

23. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x^2) + f(x) = x^4 - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η C_f έχει δύο, τουλάχιστον, κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

 **24.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

Βλέπε
λυμένη
9

$$(f \circ f)(x) = \frac{1}{4}x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f\left(\frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{4}f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ii) $f(0) = 0$.

25. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) = 9x - 8 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(9x - 8) = 9f(x) - 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

 **26.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

Βλέπε
λυμένη
10

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 8x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

 **27.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

i) $2f(x) + f(-x) = 3x^2 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $3f(x) + f(1-x) = 4x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

28. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{1-x} \text{ και } g(x) = x - x^2.$$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ και $h(x) = \frac{1}{xf(x)}$ είναι ίσες.

iii) Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$.

iv) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της $f \circ g$ είναι το διάστημα $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$.



Κριτήριο αξιολόγησης 6

Θέμα Α

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$f(x) = 4x - 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$(f \circ g)(x) = 8x + 7 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

A1. g

A2. $g \circ f$.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{\ln x}.$$

- B1.** α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
- B2.** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- B3.** Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$, όπου $g(x) = e^x$.
- B4.** Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της $f \circ g$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.



Μονοτονία συνάρτησης

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι:

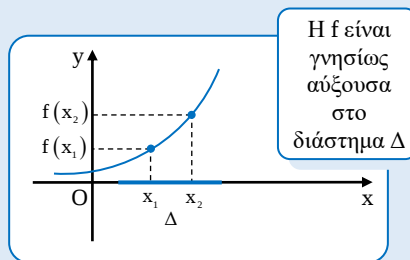
- Η C_f ανέρχεται στο διάστημα $(-\infty, 1]$. Αυτό συμβαίνει γιατί καθώς το x αυξάνεται διατρέχοντας το διάστημα $(-\infty, 1]$ το $f(x)$ αυξάνεται επίσης. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.
- Η C_f κατέρχεται στο διάστημα $[1, +\infty)$. Αυτό συμβαίνει γιατί καθώς το x αυξάνεται διατρέχοντας το διάστημα $[1, +\infty)$ το $f(x)$ μειώνεται (φθίνει). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Γενικά, έχουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός (γνησίως αύξουσας συνάρτησης)

Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2).$$



Βασικές επισημάνσεις

- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ **ανέρχεται** καθώς κινούμαστε στο Δ , από τα αριστερά προς τα δεξιά.
- Για να δηλώσουμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ γράφουμε $f \uparrow \Delta$.

- Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Με απαγωγή σε άτοπο, αποδεικνύεται και το αντίστροφο δηλαδή,

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2.$$

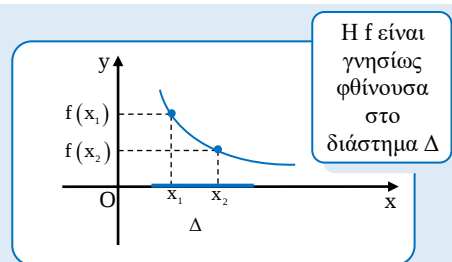
Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

Ορισμός (γνησίως φθίνουσας συνάρτησης)

Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2).$$



Βασικές επισημάνσεις

- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ **κατέρχεται** καθώς κινούμαστε στο Δ , από τα αριστερά προς τα δεξιά.
- Για να δηλώσουμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ γράφουμε $f \searrow \Delta$.
- Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Με απαγωγή σε άτοπο, αποδεικνύεται και το αντίστροφο δηλαδή,

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2.$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

- Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι **γνησίως μονότονη** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- Αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε απλά, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

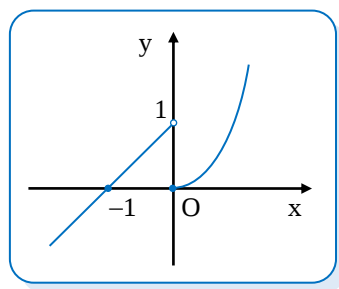
- Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f αξιοποιούμε γνωστές ιδιότητες των ανισοτήτων. Επίσης, από τις προηγούμενες τάξεις, θεωρούμε γνωστή τη μονοτονία κάποιων συναρτήσεων η οποία σε πολλές περιπτώσεις είναι ευκολομνημόνευτη με βάση τη γραφική τους παράσταση.
- Μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ δεν είναι απαραίτητα γνησίως μονότονη σε όλο το Δ .
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και έχει ρίζα σε αυτό το διάστημα, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική ρίζα της f στο Δ .
- Η μονοτονία συνάρτησης έχει από τη φύση της το στοιχείο της ανισότητας. Είναι λοιπόν λογικό να αξιοποιηθεί σε επίλυση ανισώσεων και σε απόδειξη ανισοτήτων.
- Αν μια συνάρτηση f έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα Δ_1 και Δ_2 του πεδίου ορισμού της και η ένωσή τους $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ είναι διάστημα, τότε η f δεν είναι κατ' ανάγκη γνησίως μονότονη στο Δ .

Παράδειγμα

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και στο διάστημα $[0, +\infty)$. Όμως, η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού $-1 < 0$ και $f(-1) = f(0) = 0$.



Πρόταση μελέτης

Όλες οι λυμένες ασκήσεις και από τις ασκήσεις για λύση οι:

1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 18, 22, 24, 26, 27, 29, 30, 32, 37, 38.



Λυμένες ασκήσεις

■ Μελέτη μονοτονίας

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν:

i) $f(x) = x^3 + 4x$

ii) $f(x) = e^x + x - 1$.

Λύση

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$x_1^3 < x_2^3 \text{ και } 4x_1 < 4x_2.$$

Οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$x_1^3 + x_1 < x_2^3 + 4x_2$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $e^{x_1} < e^{x_2}$. Οπότε,

$$e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1} + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2 - 1$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Σημειώσεις

- Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , θεωρούμε δύο τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και αποδεικνύουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.
- Για πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2 και θετικό περικό n ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^n < x_2^n$.
- Αν $a \in (1, +\infty)$ και $x_1 < x_2$, τότε $a^{x_1} < a^{x_2}$.
- Αν $a \in (0, 1)$ και $x_1 < x_2$, τότε $a^{x_1} > a^{x_2}$.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ όταν:

i) $f(x) = 1 - 2x^3$

ii) $f(x) = 5^{-x} - x$.

Λύση

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$\begin{aligned} x_1^3 < x_2^3 &\Leftrightarrow -2x_1^3 > -2x_2^3 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x_1^3 > 1 - 2x_2^3 \\ &\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2). \end{aligned}$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $-x_1 > -x_2$ οπότε $5^{-x_1} > 5^{-x_2}$.

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες, προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$5^{-x_1} - x_1 > 5^{-x_2} - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση

Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , θεωρούμε δύο τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και αποδεικνύουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες.

i) $f(x) = 2\ln x - \frac{1}{x}$

ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - e^x.$

Λύση

i) Έχουμε $D_f = (0, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$\begin{aligned} \ln x_1 < \ln x_2 &\Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2 \text{ και} \\ \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}. \end{aligned}$$

Οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει

$$2\ln x_1 - \frac{1}{x_1} < 2\ln x_2 - \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Σημειώσεις

- Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση f είναι **γνησίως μονότονη** σε ένα διάστημα Δ , αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** ή **γνησίως φθίνουσα** στο Δ .
- Για μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει η ισοδυναμία $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\beta}$.
- Για ομόσημους αριθμούς α, β ισχύει η ισοδυναμία $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

ii) Έχουμε $D_f = (0, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}} > \frac{1}{\sqrt{x_2}} \quad (1)$$

Επίσης,

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} - e^{x_1} > \frac{1}{\sqrt{x_2}} - e^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = -3|x| + 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

- Αν $x \leq 0$, τότε $|x| = -x$ και συνεπώς
 $f(x) = -3(-x) + 4 = 3x + 4$.
 Οπότε, για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε
 $3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 4 < 3x_2 + 4 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
 Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.
- Αν $x \geq 0$, τότε $|x| = x$ και συνεπώς $f(x) = -3x + 4$.
 Οπότε, για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε
 $-3x_1 > -3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 + 4 > -3x_2 + 4 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
 Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Σχόλιο

Αρχικά πρέπει να απαλλαγούμε από το σύμβολο της απόλυτου τιμής. Έτσι, ο τύπος της f θα γίνει πιο απλός οπότε, θα μπορούμε εύκολα να βρούμε τη μονοτονία της.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^3 + 4x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$.
- Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Λύση

i) Έχουμε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ή } x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -4.$$

Άρα, τα ζητούμενα σημεία είναι $O(0,0)$ και $A(-4,0)$.

ii) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε επειδή $-4 < 0$ πρέπει να ισχύει $f(-4) < f(0) \Leftrightarrow 0 < 0$, αδύνατον.
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε επειδή $-4 < 0$ πρέπει να ισχύει $f(-4) > f(0) \Leftrightarrow 0 > 0$, αδύνατον.

Άρα, η υπόθεσή μας, ότι δηλαδή η f είναι γνησίως μονότονη, ήταν λανθασμένη και συνεπώς η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Σχόλιο

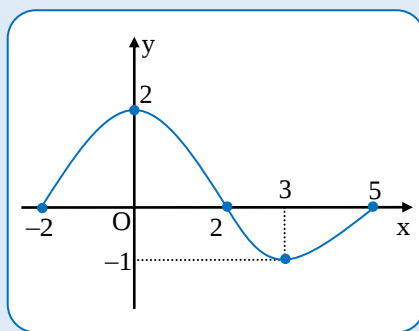
Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει κάτι, συνήθως χρησιμοποιούμε την απαγωγή σε άτοπο. Μάλιστα, πολλές φορές αυτό γίνεται με κάποιο αντιπαράδειγμα.

6. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να συγκρίνετε τις τιμές

$$f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right) \text{ και } f\left(\frac{1}{2}\right).$$



Λύση

i) Παρατηρούμε ότι, καθώς κινούμαστε από τα αριστερά προς τα δεξιά πάνω στον άξονα $x'x$ (δηλαδή, καθώς αυξάνονται οι τιμές του x) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f ανέρχεται σε καθένα από τα διαστήματα $[-2, 0]$ και $[3, 5]$ ενώ κατέρχεται στο διάστημα $[0, 3]$. Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, 5]$.

- ii) Η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Επειδή $0 \leq \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\eta\mu \frac{\pi}{7} < \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Όμως, οι αριθμοί $\eta\mu \frac{\pi}{7}$ και $\frac{1}{2}$ ανήκουν στο διάστημα $[0, 3]$, αφού $0 < \eta\mu \frac{\pi}{7} < 1$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα,

$$f\left(\eta\mu \frac{\pi}{7}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Μεθοδολογία

Για να συγκρίνουμε δύο τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ αρκεί να συγκρίνουμε τους α και β αφού πρώτα εξασφαλίσουμε ότι ανήκουν στο ίδιο διάστημα μονοτονίας της f .

■ Απόδειξη ανισοτήτων

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + 4x$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε την ανισότητα $2^{1-x^2} + 4(1-x^2) \leq 6$.

Λύση

- i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$2^{x_1} < 2^{x_2} \text{ και } 4x_1 < 4x_2.$$

Επομένως,

$$2^{x_1} + 4x_1 < 2^{x_2} + 4x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

- iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} 2^{1-x^2} + 4(1-x^2) &\leq 6 \\ \Leftrightarrow f(1-x^2) &\leq f(1). \end{aligned}$$

Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η τελευταία σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} 1-x^2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow -x^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &\geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα, συνήθως τη γράφουμε στη μορφή $f(x_1) \leq f(x_2)$

η οποία, εφόσον η f είναι γνησίως μονότονη, ισοδύναμα γράφεται:

- $x_1 \leq x_2$, αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή
- $x_1 \geq x_2$, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(-\ln x)$, $x \in (0,1)$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x^2) > f(x) \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

Λύση

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \ln x_1 < \ln x_2 < 0 &\Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2 > 0 \Leftrightarrow \ln(-\ln x_1) > \ln(-\ln x_2) \\ &\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2). \end{aligned}$$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1)$.

iii) Έχουμε

$$x^2 < x \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

Και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι

$$f(x^2) > f(x) \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

Σημείωση

Για κάθε $x \in (0,1)$ και

$$v_1, v_2 \in \mathbb{N}^* \text{ με } v_1 < v_2$$

ισχύει

$$x^{v_1} > x^{v_2}.$$

■ Επίλυση ανισώσεων και εξισώσεων

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $f(x) < 1$

β) $f(x) > e + 1.$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1.$

Λύση

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \text{ και } x_1^3 < x_2^3.$$

Οπότε,

$$e^{x_1} + x_1^3 < e^{x_2} + x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) α) Έχουμε

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \\ \Leftrightarrow x < 0,$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Έχουμε

$$f(x) > e + 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \\ \Leftrightarrow x > 1,$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Παρατηρούμε ότι το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης αφού $f(0) = e^0 + 0^3 = 1$.

Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι το 0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 1$. Δηλαδή,

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Μεθοδολογία

Για να λύσουμε μια ανίσωση συνήθως τη γράφουμε στη μορφή

$$f(x_1) < f(x_2)$$

η οποία, εφόσον η f είναι γνησίως μονότονη ισοδύναμα γράφεται:

- $x_1 < x_2$, αν η f είναι γνησίως αύξουσα
- $x_1 > x_2$, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{3^x + 4^x}{5^x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $3^x + 4^x < 5^x$.

Λύση

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x) = \frac{3^x + 4^x}{5^x} = \frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} \text{ και } \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2},$$

αφού $0 < \frac{3}{5} < 1$ και $0 < \frac{4}{5} < 1$. Οπότε,

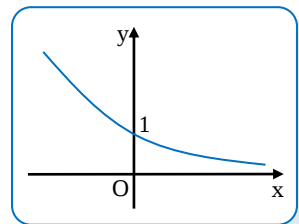
$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Σημείωση

Η εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = a^x \text{ με } 0 < a < 1$$

είναι γνησίως φθίνουσα.



Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

- ii) Η δοθείσα ανίσωση διαιρώντας και τα δύο μέλη της με $5^x > 0$, ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{3^x + 4^x}{5^x} < 1 \Leftrightarrow \frac{3^x + 4^x}{5^x} < \frac{3^2 + 4^2}{5^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) < f(2) \Leftrightarrow x > 2,$$

αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Σχόλιο

Η μορφή της ανίσωσης μας προδιαθέτει να εμφανίσουμε σε αυτή τον τύπο της f διαιρώντας και τα δύο μέλη της με $5^x > 0$.

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^5 + x < 2$

ii) $\frac{(4-x)^5 + 4 - x}{x^4 + 1} < x.$

Λύση

- i) Η δοθείσα ανίσωση γράφεται

$$x^5 + x < 1^5 + 1 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^5 + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^5 < x_2^5$.

Οπότε,

$$x_1^5 + x_1 < x_2^5 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως η ανίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1.$$

- ii) Έχουμε $x^4 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε, η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} (4-x)^5 + 4 - x < x(x^4 + 1) &\Leftrightarrow (4-x)^5 + (4-x) < x^5 + x \\ \Leftrightarrow f(4-x) < f(x) &\Leftrightarrow 4-x < x \Leftrightarrow -2x < -4 \Leftrightarrow x > 2. \end{aligned}$$

Σημείωση

Για να λύσουμε μια ανίσωση, όταν αυτό δεν είναι εύκολο με τις συνήθεις αλγεβρικές μεθόδους, τη γράφουμε στη μορφή $f(x_1) < f(x_2)$

όπου f κατάλληλη συνάρτηση για την οποία αποδεικνύουμε ότι είναι γνησίως μονότονη.

12. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(3, 1)$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $f(x) > 0$

β) $f(1 + f(x)) < 0$.

Λύση

i) Τα σημεία

$$A(2, 0) \text{ και } B(3, 1)$$

ανήκουν στη γραφική παράσταση της f . Άρα, ισχύουν οι σχέσεις

$$f(2) = 0 \text{ και } f(3) = 1.$$

Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Οπότε, επειδή

$$2 < 3,$$

θα έχουμε

$$f(2) > f(3) \Leftrightarrow 0 > 1,$$

που είναι αδύνατον. Επομένως, η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

Και επειδή είναι γνησίως μονότονη, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

ii) α) Έχουμε

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x > 2,$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Έχουμε

$$f(1 + f(x)) < 0 \Leftrightarrow f(1 + f(x)) < f(2)$$

$$\Leftrightarrow 1 + f(x) < 2 \Leftrightarrow f(x) < 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) < f(3) \Leftrightarrow x < 3,$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Σημείωση

Όταν γνωρίζουμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και θέλουμε να βρούμε το είδος της μονοτονίας της αρκεί να βρούμε δύο τιμές της $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ με $\alpha < \beta$. Οπότε:

- Αν $f(\alpha) < f(\beta)$, τότε η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα και συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- Αν $f(\alpha) > f(\beta)$, τότε η f δεν είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Παρατήρηση

Όταν γνωρίζουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f , τότε μπορούμε να λύσουμε ανισώσεις μορφής

$$f(x) < \alpha \quad \text{ή} \quad f(x) > \alpha.$$

Αρκεί βέβαια το α να είναι τιμή της συνάρτησης f , δηλαδή να ισχύει

$$\alpha = f(x_0) \text{ για κάποιο } x_0 \in D_f.$$

■ Εύρεση πρόσημου συνάρτησης

- 13.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τέτοια, ώστε $f(2) = 0$. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

Λύση

Με βάση τη μονοτονία της συνάρτησης f έχουμε

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(2) \Leftrightarrow x > 2$$

και

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x < 2.$$

Σχόλιο

Για να βρούμε το πρόσημο μιας συνάρτησης f αρκεί να λύσουμε τις ανισώσεις

$$f(x) > 0 \text{ και } f(x) < 0.$$

- 14.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2^x + x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

Λύση

- i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $2^{x_1} < 2^{x_2}$ και συνεπώς

$$2^{x_1} + x_1 < 2^{x_2} + x_1 \Leftrightarrow 2^{x_1} + x_1 - 3 < 2^{x_2} + x_1 - 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

- ii) Παρατηρούμε ότι

$$f(1) = 2^1 + 1 - 3 = 0.$$

Οπότε, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

Επίσης, με βάση τη μονοτονία της f έχουμε:

- $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow x > 1.$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τις ρίζες και το πρόσημο μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f βρίσκουμε αρχικά μία προφανή ρίζα της x_0 η οποία είναι και μοναδική. Στη συνέχεια, λύνουμε τις ανισώσεις

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0)$$

και

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0)$$

αξιοποιώντας τη μονοτονία της f .

■ Γενικές ασκήσεις

15. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες και γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- ii) Αν για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Λύση

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως,

$$-f(x_1) > -f(x_2) \Leftrightarrow (-f)(x_1) > (-f)(x_2).$$

Αρα, η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ .

ii) Οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο Δ .

Επομένως, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ και } g(x_1) < g(x_2).$$

Οπότε, επειδή τα μέλη των δύο τελευταίων ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε

$$f(x_1) \cdot g(x_1) < f(x_2) \cdot g(x_2) \Leftrightarrow (f \cdot g)(x_1) < (f \cdot g)(x_2).$$

Αρα, η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ .

16. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

Λύση

Το πεδίο ορισμού A της $f \circ g$ αποτελείται από εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $x \in D_g = \mathbb{R}$ και $g(x) \in D_f = \mathbb{R}$. Οπότε, $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $g(x_1) < g(x_2)$, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως, $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα. Δηλαδή,

$$(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2).$$

Αρα, η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \quad \text{για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln f(x)$.

Λύση

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \quad (1)$$

αφού η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Επίσης, $\sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2$ αφού η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Οπότε,

$$-\sigma\upsilon\nu x_1 < -\sigma\upsilon\nu x_2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\eta\mu x_1 - \sigma\upsilon\nu x_1 < \eta\mu x_2 - \sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2},$$

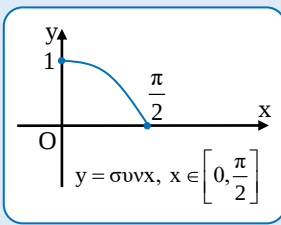
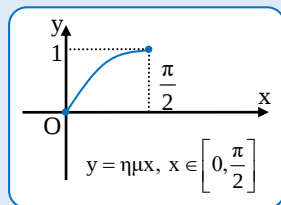
αφού

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Άρα,

$$D_g = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Σημείωση



18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^3} - \sqrt{x}$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) + f(3x) > f(2x) + f(4x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^4)$$

έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό $x = 1$.

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$\begin{aligned} x^3 &\neq 0 \text{ και } x \geq 0 \\ \Leftrightarrow x &\neq 0 \text{ και } x \geq 0 \\ \Leftrightarrow x &> 0. \end{aligned}$$

Επομένως, $D_f = (0, +\infty)$.

Οπότε, για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1^3} > \frac{1}{x_2^3} \quad (1)$$

και

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{1}{x_1^3} - \sqrt{x_1} > \frac{1}{x_2^3} - \sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$x < 2x \text{ και } 3x < 4x.$$

Όμως, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Οπότε,

$$f(x) > f(2x) \text{ και } f(3x) > f(4x)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$f(x) + f(3x) > f(2x) + f(4x).$$

iii) Η δοθείσα εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{aligned} x \in D_f \text{ και } x^3 \in D_f \text{ και } x^2 \in D_f \text{ και } x^4 \in D_f \\ \Leftrightarrow (x > 0 \text{ και } x^3 > 0 \text{ και } x^2 > 0 \text{ και } x^4 > 0) \\ \Leftrightarrow x > 0. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα της δοθείσας εξίσωσης.

Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η εξίσωση έχει και κάποια άλλη ρίζα $x_0 \neq 1$.

Δηλαδή, ότι υπάρχει $x_0 \neq 1$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) + f(x_0^3) = f(x_0^2) + f(x_0^4).$$

- Αν $0 < x_0 < 1$, τότε $x_0 > x_0^2$ και $x_0^3 > x_0^4$.

Οπότε, με βάση τη μονοτονία της f , προκύπτει

$$f(x_0) < f(x_0^2) \text{ και } f(x_0^3) < f(x_0^4).$$

Επομένως, προσθέτουμε κατά μέλη έχουμε

$$f(x_0) + f(x_0^3) < f(x_0^2) + f(x_0^4),$$

που είναι άτοπο.

Άρα, η δοθείσα εξίσωση δεν έχει ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

- Αν $x_0 > 1$, τότε $x_0 < x_0^2$ και $x_0^3 < x_0^4$.

Οπότε, με βάση τη μονοτονία της f , προκύπτει

$$f(x_0) > f(x_0^2) \text{ και } f(x_0^3) > f(x_0^4).$$

Επομένως, προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$f(x_0) + f(x_0^3) > f(x_0^2) + f(x_0^4),$$

που είναι άτοπο.

Άρα, η δοθείσα εξίσωση δεν έχει ρίζα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^4)$$

έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό $x = 1$.

19. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$(f(x))^3 + 4f(x) = x + 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

α' τρόπος

Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Δηλαδή, ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοιοι, ώστε

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Επομένως,

$$(f(x_1))^3 \geq (f(x_2))^3 \quad \text{και} \quad 4f(x_1) \geq 4f(x_2).$$

Οπότε,

$$(f(x_1))^3 + 4f(x_1) \geq (f(x_2))^3 + 4f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 2 \geq x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2,$$

που είναι άτοπο.

Άρα, η υπόθεση που κάναμε, δηλαδή ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα, ήταν λανθασμένη. Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β' τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 + 2 &< x_2 + 2 \\ \Leftrightarrow (f(x_1))^3 + 4f(x_1) &< (f(x_2))^3 + 4f(x_2) \\ \Leftrightarrow g(f(x_1)) &< g(f(x_2)) \quad (1) \end{aligned}$$

όπου

$$g(x) = x^3 + 4x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1^3 < x_2^3 \quad \text{και} \quad 4x_1 < 4x_2.$$

Οπότε,

$$x_1^3 + 4x_1 < x_2^3 + 4x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται $f(x_1) < f(x_2)$.

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.



Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Κάθε συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.
4. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και $x_1, x_2 \in \Delta$, τότε στο διάστημα αυτό ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

5. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και $x_1, x_2 \in \Delta$, με $f(x_1) < f(x_2)$ τότε $x_1 > x_2$.
6. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε η συνάρτηση f είναι κατ' ανάγκη γνησίως φθίνουσα στο Δ .
7. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η συνάρτηση f είναι κατ' ανάγκη γνησίως αύξουσα στο Δ .
8. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοιοι ώστε $f(x_1) = f(x_2)$ τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ .
9. Αν για κάποια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(-1) = f(-3)$, τότε αυτή η συνάρτηση μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα.



Ασκήσεις για λύση

■ Μελέτη μονοτονίας

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν:

Βλέπε
λυμένη
1

i) $f(x) = x^5 + 4x^3$

ii) $f(x) = 2^x + 3x - 5$.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ όταν:

Βλέπε
λυμένη
2

i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$

ii) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - \ln x$.

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες.

Βλέπε
λυμένη
3

i) $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$

ii) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

iii) $f(x) = e^{-x} - e^x$

iv) $f(x) = \ln(\ln x)$.

4. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες.

i) $f(x) = x^2 + 4, x \leq 0$

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, x \geq 0$

iii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \leq 0$

iv) $f(x) = \sin x - x^2, x \in [0, \pi]$

v) $f(x) = x^3 + \eta \mu x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

vi) $f(x) = \ln(\varepsilon \phi x), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2|x - 1| + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
4

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και πραγματικός αριθμός α για τον οποίο ισχύει $f(2\alpha) < f(\alpha^2 + 1)$.

Να εξετάσετε αν αυτή η συνάρτηση μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
5

- i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.
ii) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

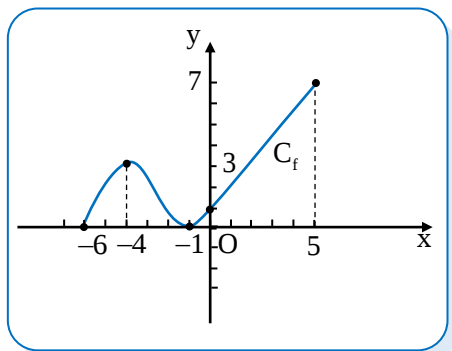
8. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $A = [-6, 5]$.

Βλέπε
λυμένη
6

- i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι:

- α) γνησίως αύξουσα
β) γνησίως φθίνουσα.

- ii) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{3}{2}\right) < f(2)$.

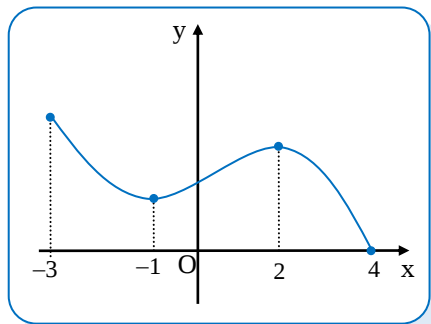


9. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$.

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

- ii) Να συγκρίνετε τις τιμές:

- α) $f(e)$ και $f(\pi)$
β) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ και $f\left(\eta\mu\frac{\pi}{5}\right)$.



■ Απόδειξη ανισοτήτων

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(1 + e^x)$, $x \geq 0$.

Βλέπε
λυμένη
7

- i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

- ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{\ln(1+e)}{\ln(1+e^2)} < \sqrt{2}$.

 **11.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
8

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(|x|) \geq 2^{-x} - x$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \ln x$, $x > 0$.

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.
- ii) Να αποδείξετε ότι

$$(x^2 + 1)^3 + \ln(x^2 + 1) \geq 8x^3 + \ln 2x \text{ για κάθε } x > 0.$$

■ Επίλυση ανισώσεων και εξισώσεων

 **13.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + 5x$, $x \in \mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
9

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 6$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$, $x > 0$.

Βλέπε
λυμένη
10

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{x^3} + \sqrt{x} < \sqrt{x^3} + \frac{1}{x}$.

 **15.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2}\eta\mu x + \epsilon\phi x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Βλέπε
λυμένη
10

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- ii) Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ και $f\left(-\frac{\pi}{9}\right)$.
- iii) Να λύσετε τις ανισώσεις:
 - α) $f(x) > f(-x)$
 - β) $f^2(x) < 2f(x)$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3^x + 5^x}{2^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
10

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 ii) Να λύσετε την ανίσωση $9^x + 25^x < 4^{x+1}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, $x > 0$.

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 ii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\frac{1}{x} < \ln x + 1$

β) $f(x^3) > f(4x)$.

 **18.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 ii) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln x < x$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^{-x} - x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 ii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $3^x(x^3 + 1) > 1$

β) $9^{-x} - 8x^3 < 3^{-x} - x^3$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x) + x$, $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 ii) Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{1 + e^x}{1 + e^{-x}} < -2x$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln(x+1)$, $x > -1$.

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{-x} < \ln(x+1) + 1$.
 iii) Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{x+1}{x^2+1} < e^{-x} - e^{-x^2}$.

 **22.** Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Βλέπε
λυμένη
11

i) $x^5 + 3x < 4$

ii) $2\eta\mu x < 1, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

iii) $e^{x-1} + \ln x > 1$

iv) $\frac{2}{x} - \ln x > 2.$

23. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

i) $e^{x^2-7x} + x^2 > 7x + 1$

ii) $e^{4x} - e^{x^3} > 2\ln x - \ln 4$

iii) $\ln \frac{x^2 + 4}{x - 2} < e^{x-2} - e^{x^2+4}$

iv) $\ln(e^x + \sqrt{x}) \leq 2 - 2e^x - 2\sqrt{x}.$

 **24.** Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5, 11)$ και $B(7, 13)$.

Βλέπε
λυμένη
12

i) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

ii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $f(x) > 11$

β) $f(x-1) > 13.$

25. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(4, 3)$ και $B(5, 1)$.

i) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(2 + f(x^2)) < 1.$

■ Εύρεση προσήμου συνάρτησης

 **26.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και τέτοια, ώστε $f(4) = 0$. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

Βλέπε
λυμένη
13

 **27.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 7x^3 - 8, x \in \mathbb{R}.$

Βλέπε
λυμένη
14

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$.

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- ii) Να βρείτε το πρόσημο της f .

■ Γενικές ασκήσεις

 **29.** Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι:

Βλέπε
λυμένη
15

- i) αν $f \searrow \Delta$, τότε $-f \nearrow \Delta$
- ii) αν $f \nearrow \Delta$ και $g \searrow \Delta$, τότε $(f - g) \nearrow \Delta$.

 **30.** Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

Βλέπε
λυμένη
16

- i) αν $f \nearrow \mathbb{R}$ και $g \searrow \mathbb{R}$, τότε $f \circ g \searrow \mathbb{R}$
- ii) αν $f \searrow \mathbb{R}$ και $g \searrow \mathbb{R}$, τότε $f \circ g \nearrow \mathbb{R}$.

31. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα με $f(2) = 8$.

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = x^3 - f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι γνησίως αύξουσα.

- ii) Να λύσετε την ανίσωση $8x^3 < f(2x)$.

 **32.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Βλέπε
λυμένη
17

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- ii) Να βρείτε το πρόσημο της f .
- iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln(x - e^{1-x})$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\epsilon\phi x - \frac{\pi}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

34. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι περιττή και γνησίως αύξουσα.

- i) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln[xf(x)]$.

35. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- i) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g .
- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{f(x) - g(x)}$.

36. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x^3) = 3^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

 **37.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Βλέπε
λυμένη
18

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(2x) + f(5x) < f(3x) + f(7x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

- iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(2x) + f(e^x) = f(x) + 2$$

έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό $x = 0$.

 **38.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

Βλέπε
λυμένη
19

$$f^3(x) + 2f(x) = 1 - e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = x^3 + 2x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

39. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$e^{f(x)} + 3f(x) = x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.



Κριτήριο αξιολόγησης 7

Θέμα Α

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x - e^{-x} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x.$$

- A1.** Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.
- A2.** Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία.
- A3.** Να αποδείξετε ότι

$$\frac{3}{2} < e - \frac{1}{e} < \frac{8}{3}.$$

- A4.** Να λύσετε την ανίσωση $h(x^3) < h(x)$.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4\sin x - e^{\pi x}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

- B1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- B2.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$4\sin \frac{\pi}{5} - e^{\frac{\pi}{5}} \quad \text{και} \quad 2 - \sqrt{3}.$$

- B3.** Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 2\sqrt{2} - 1.$$